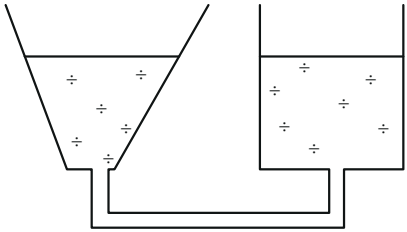
Нагрев воды в сообщающихся сосудах

Задача 5. [ИОШ 2023/24, 11 класс, задача 5] Система из двух стеклянных сообщающихся сосудов, один из которых является цилиндрическим, а второй имеет форму перевёрнутого конуса, заполнена водой (см. рисунок). В некоторый момент времени воду в коническом сосуде нагревают. Как при этом изменится уровень воды в цилиндрическом сосуде? Считать, что коэффициент термического расширения стекла много меньше коэффициента термического расширения воды. Ответ обосновать.



▲ **Решение. Что происходит.** Это сообщающиеся сосуды, но с разной плотностью воды: в одном колене вода нагрета и стала менее плотной, в другом осталась холодной. В равновесии давление на уровне соединительной трубки слева и справа одинаково, иначе вода потечёт. Значит, нужно понять, как нагрев меняет давление столба воды в коническом колене: уменьшится оно — вода потечёт в конус из цилиндра, и уровень в цилиндре упадёт. Главная идея — сначала сравнить конус с цилиндром: в цилиндре давление при нагреве не изменилось бы, а в конусе — меняется.

Обозначения. Размеры сосудов не меняются (стекло расширяется гораздо слабее воды). Пусть до нагрева уровень воды в обоих коленах равен h; отсчитываем его от дна сосудов (по рисунку донья обоих сосудов на одном уровне); плотность воды ρ. При нагреве объём данной массы воды увеличивается в $n > 1$ раз, а плотность уменьшается в n раз (масса не меняется).

Допущения (в условии о них ничего не сказано, как и в решении организаторов). Вода в коническом сосуде прогрета однородно: вся она,

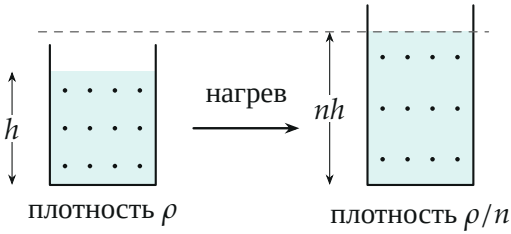
включая ту, что перетечёт в него позже, имеет одну температуру и плотность ρ/n. Вода в соединительной трубке и в цилиндре не нагревается. Трубка всё время заполнена водой, поэтому масса воды в ней не меняется — её объём в ответ не входит, пренебрегать им не нужно.

1. Давление столба. Для покоящейся воды плотности ρ давление на глубине h равно $p = \rho g h$ и не зависит от формы сосуда: давление определяется глубиной и плотностью, а не весом столба. Условие равновесия сообщающихся сосудов: давление на уровне горизонтальной трубки слева и справа одинаково. Отводы от дна сосудов до трубки заполнены холодной водой и имеют одинаковую высоту, их столбики добавляют слева и справа одно и то же давление. Поэтому одинаковы и давления на уровне дна сосудов: сравнивать достаточно давления столбов воды в самих сосудах.

2. Если бы нагревали цилиндрическое колено. Площадь сечения S постоянна, поэтому объём $V = Sh$ вырос в n раз — высота столба тоже выросла в n раз: $h \to nh$. Плотность упала в n раз: $\rho \to \rho/n$. Давление

$$p' = \frac{\rho}{n} g\, nh = \rho g h = p$$

не изменилось: уровень в соседнем колене остался бы прежним.



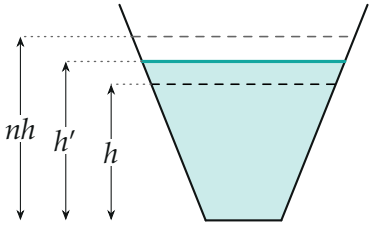
Нагрев в цилиндрическом сосуде (расширение преувеличено): точек — столько же, но они разошлись; столб выше в n раз, а плотность ниже в n раз.

3. Конус, расширяющийся кверху. Плотность воды падает в n раз так же — она зависит только от роста объёма. А вот высота столба вырастет меньше, чем в n раз: объём конуса от дна до высоты h растёт

быстрее первой степени h, ведь сечение увеличивается кверху. Поэтому тот же объём nV набирается раньше: уровень поднимется до $h' < nh$ (рисунок). Давление

$$p' = \frac{\rho}{n} g\, h' < \frac{\rho}{n} g\, nh = \rho g h = p.$$

Давление у дна нагретого колена уменьшилось. Холодный столб в цилиндре давит с прежней силой $\rho g h$ и теперь перевешивает: вода перетекает из цилиндра в конус, уровень в цилиндре понижается.

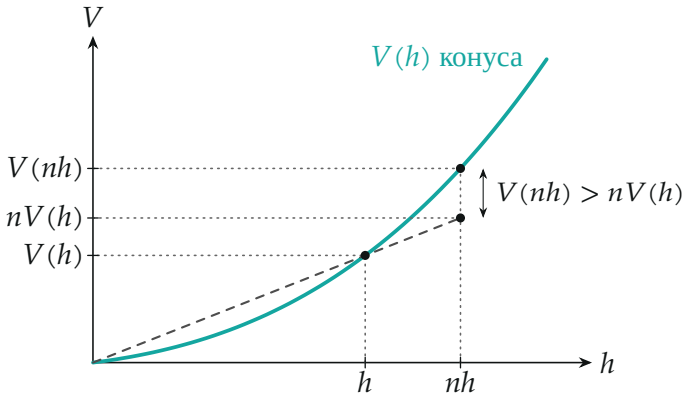


Нагрев в сосуде-конусе: объём nV вмещается до уровня h' (бирюзовая линия), меньшего nh (серая штриховая); чёрная штриховая — прежний уровень h. Расширение преувеличено для наглядности.

4. Строго: где устанавливается новый уровень. Рассуждение пункта 3 пока не учитывало, что вода перетекает и массы в коленах меняются. Докажем от противного, что новый уровень h_2 в цилиндре меньше h. Пусть он не ниже прежнего: $h_2 \geq h$. Нагретая вода в конусе на высоте h_1 уравновешивает холодный столб: $\frac{\rho}{n} g\, h_1 = \rho g h_2$, откуда $h_1 = nh_2 \geq nh$. Масса воды в коническом колене тогда

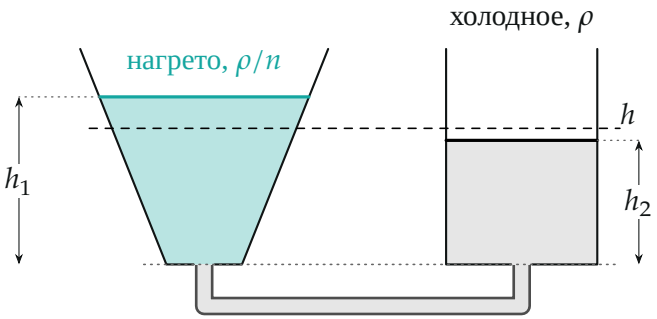
$$m_1 = \frac{\rho}{n} V_{\text{к}}(h_1) \geq \frac{\rho}{n} V_{\text{к}}(nh) > \frac{\rho}{n} \cdot nV_{\text{к}}(h) = \rho V_{\text{к}}(h),$$

где $V_{\text{к}}(x)$ — объём конуса от дна до высоты x. Последнее неравенство — как раз то, что конус расширяется кверху: $V_{\text{к}}(x)/x$ растёт вместе с x, и $V_{\text{к}}(nh) > nV_{\text{к}}(h)$ (график). Масса в цилиндре при $h_2 \geq h$ не меньше прежней $\rho S h$, масса в трубке не изменилась. Получается, что общая масса воды выросла, хотя воду не добавляли — противоречие. Значит, $h_2 < h$.

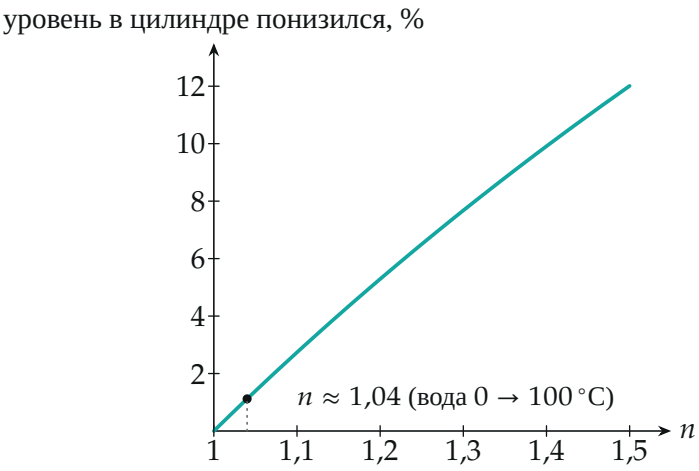


Объём конуса $V_к(h)$ (бирюзовая кривая) выпуклый: цилиндр с тем же объёмом при h давал бы $nV_к(h)$ при высоте nh (пунктир), а конус вмещает на этой высоте больше.

5. Сколько. Из пункта 4 следует и сама величина. Условие равновесия $h_1 = nh_2$ и сохранение массы $\frac{\rho}{n} V_к(h_1) + \rho S h_2 = \rho V_к(h) + \rho S h$ — два уравнения на h_1 и h_2. Для примера: конус с радиусом дна 0,5 и наклоном стенки 0,4, цилиндр радиуса 1, $h = 1{,}8$ в одних единицах; расчёт на python даёт при сильно преувеличенном $n = 1{,}35$ уровни $h_1 \approx 2{,}22$ и $h_2 \approx 1{,}64$ (рисунок); при реальном нагреве воды от 0 до 100 °C ($n \approx 1{,}04$) уровень в цилиндре понижается на 1,1 %.



Новое равновесие при $n = 1{,}35$: уровень в конусе h_1 выше прежнего h, в цилиндре h_2 ниже; давление на уровне трубки одинаково, $\rho g h_2 = \frac{\rho}{n} g h_1$.



Понижение уровня в цилиндре в зависимости от n для того же сосуда: растёт вместе с нагревом.

Обратите внимание. Вывод о «давление в конусе уменьшилось» относится к давлению у дна нагретого сосуда. Он верен для конуса, расширяющегося кверху; для обычного конуса (сужающегося кверху) всё наоборот.

Проверка. Предел «конус стал цилиндром» ($V_к(x) \propto x$): $V_к(nh) = nV_к(h)$, неравенство пункта 4 становится равенством, и $h_2 = h$ — как в пункте 2. Для конуса, сужающегося кверху, $V_к(nh) < nV_к(h)$, знаки меняются, и уровень в цилиндре повышается. Размерность: сравниваются давления ρgh с обеих сторон. Второй способ — численный: уравнения пункта 5 решены для нескольких n (рисунок), уровень в цилиндре падает при любом $n > 1$.

Смысл: в нагретом сосуде вода одновременно разжижается и «расползается» вверх; в цилиндре эти два эффекта сокращаются точно, а в расширяющемся кверху сосуде вода занимает больше места по площади, чем растёт высота, и давление у дна падает.

Ответ. Уровень воды в цилиндрическом сосуде понизится.