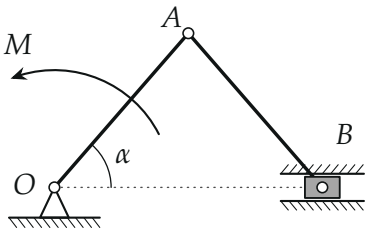
Кривошипно-ползунный механизм

Задача 6. [ИОШ 2023/24, 11 класс, задача 6] Кривошипно-ползунный механизм состоит из кривошипа — невесомого стержня OA длиной l, который может вращаться вокруг оси O, шатуна — невесомого стержня AB такой же длины l, шарнирно связанного с кривошипом, и ползуна B массой m — точечного тела, которое шарнирно связано с шатуном и может без трения двигаться в горизонтальных направляющих (см. рисунок). Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω в вертикальной плоскости вокруг оси O под действием приложенного к нему момента M внешней силы. Найти момент M внешней силы, когда угол между кривошипом и направляющими равен α.



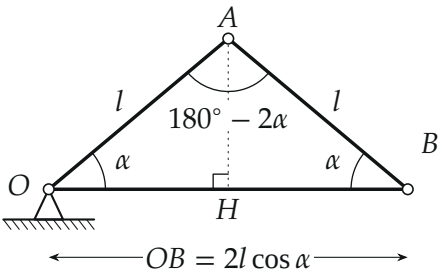
▲ **Решение. Что происходит.** Кривошип вращается равномерно и невесом — значит, ему не нужен «лишний» момент: момент внешней силы M целиком уравновешивается моментом силы, с которой шатун тянет кривошип. Эта сила — натяжение шатуна T, и его мы найдём из второго закона Ньютона для ползуна: ползун разгоняется и тормозится вдоль направляющих, шатун единственная сила в этом направлении. Порядок решения такой: кинематика (ускорение ползуна) → динамика (сила T) → моменты на кривошипе (момент M). Это «момент → сила → ускорение», прочитанное справа налево.

Обозначения. α — угол между кривошипом OA и направляющими, $\alpha = \omega t$ (угловая скорость постоянна), T — сила натяжения шатуна, N — сила реакции направляющих, a — ускорение ползуна, d — плечо силы T относительно O.

1. Геометрия. Треугольник OAB равнобедренный: $OA = AB = l$. Углы при основании OB равны: $\angle AOB = \angle ABO = \alpha$, угол при вершине

$\angle OAB = 180° - 2\alpha$. Высота AH делит основание пополам, $OH = l\cos\alpha$, и

$$OB = 2l\cos\alpha.$$



Равнобедренный треугольник OAB ($\alpha = 40°$ на рисунке).

2. Кинематика ползуна: первый способ — через координату. Ползун на оси, направленной вдоль направляющих от O: $x_B = OB = 2l\cos\alpha$. Так как $\alpha = \omega t$, производные по времени дают

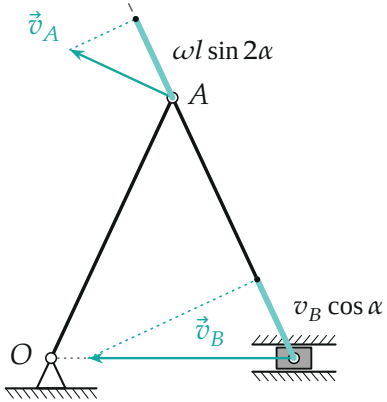
$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = -2l\omega\sin\alpha, \qquad a_B = \frac{dv_B}{dt} = -2l\omega^2\cos\alpha.$$

Ползун колеблется гармонически с амплитудой $2l$ ($a_B = -\omega^2 x_B$), ускорение направлено к O и по модулю равно $a = 2l\omega^2\cos\alpha$.

Второй способ — через проекции скоростей на шатун. Шатун нерастяжим: проекции скоростей его концов на шатун одинаковы. Скорость шарнира A перпендикулярна кривошипу: $v_A = \omega l$. Угол между $\vec{v}_A$ и шатуном равен $90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$ (скорость и кривошип образуют $90°$, кривошип и шатун — $180° - 2\alpha$), поэтому проекция v_A на шатун равна $\omega l\sin 2\alpha$ по модулю. Ползун движется вдоль направляющих, угол между шатуном и направляющими α, проекция $v_B\cos\alpha$. Отсюда

$$v_B\cos\alpha = \omega l\sin 2\alpha \implies v_B = 2\omega l\sin\alpha,$$

и после дифференцирования ($\dot{\alpha} = \omega$) — то же ускорение $a = 2l\omega^2\cos\alpha$.



Проекции скоростей концов шатуна на шатун равны (бирюзовые отрезки на шатуне); $\alpha = 65°$, длины векторов в одном масштабе.

3. Второй закон Ньютона для ползуна. На ползун действуют три силы: тяжесть $m\vec{g}$, реакция гладких направляющих $\vec{N}$ (перпендикулярна направляющим) и натяжение шатуна $\vec{T}$. Шатун невесомый, шарниры на его концах — значит, сила вдоль шатуна (моменты сил на невесомый стержень должны быть равны нулю), и $\vec{T}$ направлена вдоль BA, под углом α к направляющим.

Выберем ось x вдоль направляющих в сторону к O — туда, куда направлено ускорение: тогда силы N и mg перпендикулярны оси и в проекцию не войдут, и ничего про N знать не придётся. Запишем второй закон Ньютона векторно, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$, и в проекции на ось x:

$$m\,a = T\cos\alpha \implies T = \frac{m \cdot 2l\omega^2 \cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\,m\,l\,\omega^2.$$

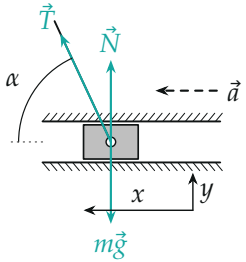


Схема «тело m»: ось x — вдоль направляющих к O, ось y — вверх; ускорение $\vec{a}$ направлено по x.

Натяжение не зависит от угла: $\cos\alpha$ сокращается — с ростом угла силе T нужна меньшая проекция, но и ускорение уменьшается так же.

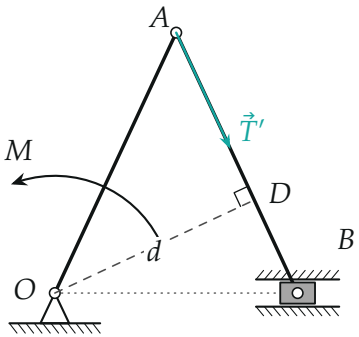
4. Моменты сил на кривошипе. Кривошип невесом и вращается с постоянной ω, поэтому сумма моментов сил, действующих на него, относительно оси O равна нулю. На кривошип действуют: реакция оси O (её момент относительно O равен нулю — ось и есть точка отсчёта), момент M внешней силы (против часовой стрелки) и сила $\vec{T}'$ со стороны шатуна в шарнире A. По третьему закону Ньютона $T' = T$, направлена от A к B вдоль шатуна. Её момент относительно O равен Td (по часовой стрелке), где плечо d — расстояние от O до линии AB, опущенный перпендикуляр OD. В прямоугольном треугольнике OAD угол при A равен $180^\circ - 2\alpha$, а $\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$:

$$d = l\sin(180^\circ - 2\alpha) = l\sin 2\alpha.$$

Уравнение моментов $M - Td = 0$ даёт

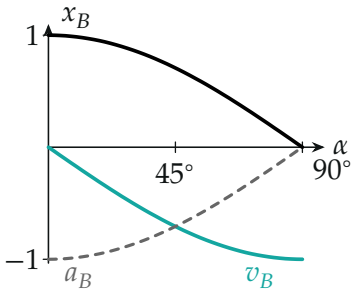
$$M = Tl\sin 2\alpha = 2ml^2\omega^2\sin 2\alpha.$$

Знак: при $0 < \alpha < 90^\circ$ получаем $M > 0$ — момент направлен против часовой стрелки, как на рисунке условия. Направление вращения кривошипа в условии не указано, но оно и не важно: ускорение $a = 2l\omega^2\cos\alpha$ и натяжение T от знака ω не зависят, и момент всегда должен уравновешивать момент силы T' (по часовой стрелке).

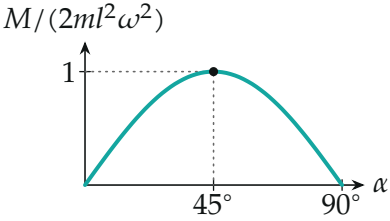


Моменты на кривошипе: M против часовой стрелки, сила шатуна $\vec{T}'$ в шарнире A (плечо $d = OD$) — по часовой.

5. Как M зависит от положения. При $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 90°$ момент обращается в нуль: стержни лежат на одной прямой с осью O, линия действия T проходит через O, плечо равно нулю. Наибольшего значения $M = 2ml^2\omega^2$ момент достигает при $\alpha = 45°$, когда шатун перпендикулярен кривошипу.



Координата, скорость и ускорение ползуна как функции угла (в долях $2l$, $2l\omega$, $2l\omega^2$).



Момент M в долях $2ml^2\omega^2$: наибольший при 45°, равен нулю при 0 и 90°.

Обратите внимание. Реакция N в ответ не вошла, но она не нуль: $N = mg - T\sin\alpha$ — вертикальная проекция T уменьшает давление ползуна на нижнюю направляющую. Тяжесть ползуна момента на кривошипе не создаёт: в проекции на направляющие она нулевая, а в момент кривошипа входит только T.

Проверка. Размерность: $m\,l^2\omega^2$ — это кг·м^2·с$^{-2}$ = Дж = Н·м, как и должно быть у момента силы. Второй способ — через мощность: неве-

сомые кривошип и шатун энергии не накапливают, трения нет, сила тяжести и реакция направляющих работы не совершают (они перпендикулярны перемещению ползуна), поэтому вся мощность момента $M\omega$ идёт на изменение кинетической энергии ползуна: $M\omega = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv_B^2}{2}\right) = m\,v_B\,a_B$. Подставим $v_B = -2l\omega\sin\alpha$, $a_B = -2l\omega^2\cos\alpha$:

$$M = \frac{m\,(2l\omega\sin\alpha)(2l\omega^2\cos\alpha)}{\omega} = 2ml^2\omega^2\sin 2\alpha,$$

ответ совпал. Численная проверка (python): $m = 1$ кг, $l = 0{,}5$ м, $\omega = 10$ с$^{-1}$, $\alpha = 30^\circ$ — $a_B = -86{,}6$ м/с^2 (двойное численное дифференцирование $x_B(t)$), $T = 100$ Н, $M = 43{,}3$ Н·м, мощность $m\,a_B v_B/\omega$ даёт те же 43,3 Н·м.

Смысл: из-за $OA = AB$ ползун колеблется как на пружине, сила T постоянна, а момент меняется только из-за плеча $l\sin 2\alpha$: чем ближе механизм к «мёртвым» положениям, тем хуже сила шатуна поворачивает кривошип.

Ответ. $M = 2\,m\,l^2\omega^2\sin 2\alpha$.