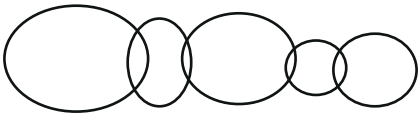
Цепочка замкнутых проводников

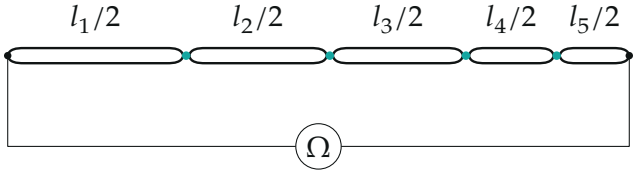
Задача 1. [ИОШ 2023/24, 9 класс, задача 1] Из провода длиной l и площадью поперечного сечения S изготовили пять замкнутых проводников разных длин и зацепили их в цепочку так, как это показано на рисунке. Как, имея в распоряжении только омметр (прибор для измерения сопротивлений) и проводя только одно измерение, определить удельное сопротивление провода, не разрезая проводников. Считать, что в точках касания проводников между ними есть электрические контакты. Описать последовательность действий, которые нужно выполнить для измерения, и привести расчётные формулы для вычисления удельного сопротивления.



▲ **Решение. Что происходит.** Пять колец соединены друг с другом только в точках касания, поэтому цепочка — это пять кусков провода, включённых один за другим. Каждое кольцо между двумя точками контакта распадается на две дуги, включённые параллельно. Сопротивление такой пары зависит от того, где лежат точки контакта, а их положение в произвольной цепочке неизвестно. Идея — растянуть цепочку: тогда каждое кольцо вытягивается в двойную нить, и точки контакта оказываются ровно на её концах, т.е. делят кольцо пополам. Это задача на смешанное соединение проводников и формулу $R = \rho l/S$.

Обозначения. $l_1, \dots, l_5$ — длины колец ($l_1 + \dots + l_5 = l$); $R_i = \rho l_i/S$ — сопротивление провода i-го кольца; $R = \rho l/S$ — сопротивление всего провода; r — показание омметра.

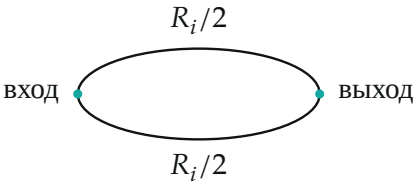
1. Что сделать. Взять цепочку за два крайних кольца и растянуть её в прямую линию, чтобы каждое кольцо вытянулось в узкую петлю. Подключить омметр к двум крайним точкам цепочки: к дальнему концу первой петли и к дальнему концу пятой (рисунок). Записать показание r.



Растянутая цепочка: каждое кольцо — узкая петля из двух половин длиной $l_i/2$; бирюзовые точки — контакты соседних колец, омметр подключён к концам цепочки.

2. Одно растянутое кольцо. Ток входит в петлю на одном её конце и выходит на другом. От конца до конца ведут две половины провода, каждая длиной $l_i/2$ и сопротивлением $R_i/2$. Они соединены параллельно (общие начало и конец), поэтому

$$R_{\text{петли}} = \frac{\frac{R_i}{2}\cdot\frac{R_i}{2}}{\frac{R_i}{2}+\frac{R_i}{2}} = \frac{R_i}{4}.$$

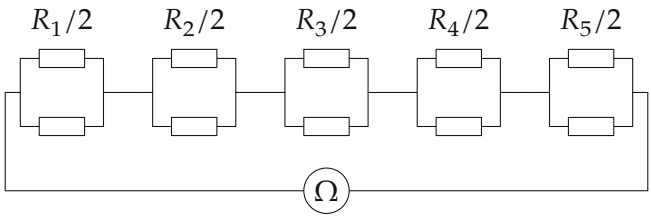


Кольцо с контактами в диаметрально противоположных (по длине провода) точках: две равные дуги параллельно.

3. Вся цепочка. Петли соединены одна за другой — последовательно; их сопротивления складываются:

$$r = \frac{R_1}{4}+\frac{R_2}{4}+\frac{R_3}{4}+\frac{R_4}{4}+\frac{R_5}{4} = \frac{\rho\,(l_1+\cdots+l_5)}{4S} = \frac{\rho\,l}{4S}.$$

Длины отдельных колец не нужны: в ответ входит только общая длина провода.



Эквивалентная схема: пять пар одинаковых резисторов $R_i/2$, пары соединены последовательно.

4. Расчётная формула. Из $r = \rho l/(4S)$

$$\rho = \frac{4rS}{l}.$$

Обратите внимание. Без растягивания измерение ничего не даёт: если контакты делят кольцо на дуги в долях a и $1-a$, сопротивление кольца между ними $R_i\,a(1-a)$, а a у каждого кольца своё и неизвестно. Растянутая петля гарантирует $a = \frac{1}{2}$. Заодно видно, что при $a = \frac{1}{2}$ произведение $a(1-a)$ максимально, так что в нерастянутой цепочке омметр показал бы меньше $R/4$.

Проверка. Размерность: $[rS/l] = \text{Ом}\cdot\text{м}^2/\text{м} = \text{Ом}\cdot\text{м}$ — единица удельного сопротивления. Частный случай: одно кольцо из всего провода — омметр между противоположными концами петли покажет $\frac{R}{4}$, как и по общей формуле.

Смысл: растягивание превращает неизвестную геометрию в известную — каждое кольцо делится ровно пополам.

Ответ. Растянуть цепочку за крайние кольца в линию и измерить омметром сопротивление r между её крайними точками; тогда $r = \dfrac{\rho l}{4S}$ и $\rho = \dfrac{4rS}{l}$.