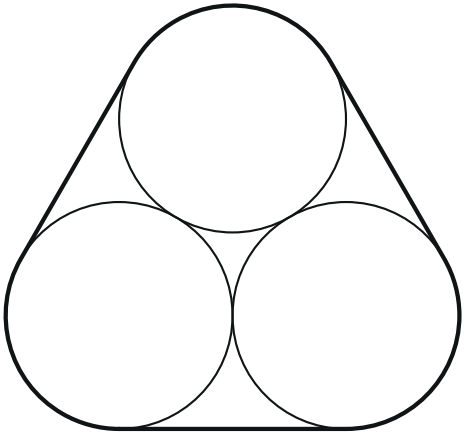
Резиновое кольцо на трёх цилиндрах

Задача 2. [ИОШ 2023/24, 9 класс, задача 2] Имеется упругое резиновое кольцо, коэффициент жёсткости которого равен k. Кольцо растянули и надели на три одинаковых цилиндра радиуса R (см. рис.; вид с торца цилиндров). Найти силы взаимодействия цилиндров, если длина недеформированного кольца — $7R$. Считать, что для любых удлинений кольца работает закон Гука.



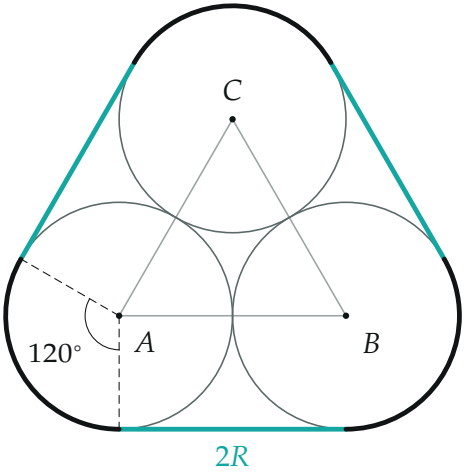
▲ **Решение. Что происходит.** Растянутое кольцо стягивает три цилиндра, и они давят друг на друга. Сила натяжения резинки одна и та же по всей её длине (резинка лёгкая, трения о цилиндры нет — иначе натяжение было бы разным на разных участках), и по закону Гука её даёт удлинение. Значит, сначала нужна геометрия — длина надетого кольца, потом закон Гука, потом условие равновесия одного цилиндра. Это задача на равновесие тела под действием нескольких сил плюс закон Гука.

Обозначения. L — длина надетого кольца; T — сила натяжения кольца; N — сила, с которой цилиндры давят друг на друга; A, B, C — оси цилиндров.

1. Длина надетого кольца. Цилиндры касаются, поэтому их оси образуют правильный треугольник со стороной $2R$. Кольцо состоит из трёх прямых участков и трёх дуг. Каждый прямой участок — общая

касательная двух соседних цилиндров, параллельная стороне треугольника; его длина равна стороне, $2R$. На каждом цилиндре кольцо лежит по дуге между двумя радиусами, перпендикулярными соседним прямым участкам. Угол между этими радиусами равен $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (внешний угол правильного треугольника). Три дуги по 120° составляют полную окружность:

$$L = 3 \cdot 2R + 3 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = 6R + 2\pi R.$$



Кольцо — три прямых участка $2R$ (бирюзовые) и три дуги по 120° (чёрные), вместе дуги дают одну окружность.

2. Закон Гука. Удлинение кольца и сила натяжения:

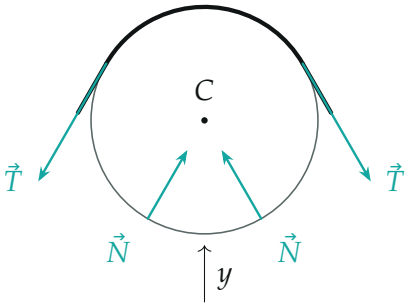
$$\Delta l = L - 7R = (2\pi - 1)\,R, \qquad T = k\,\Delta l = (2\pi - 1)\,kR.$$

3. Равновесие верхнего цилиндра. На цилиндр C действуют: резинка — с силами T на концах охватывающей его дуги, вдоль прямых участков (к цилиндрам A и B); цилиндры A и B — с силами N вдоль линий центров AC и BC (гладкие цилиндры давят по нормали, а нормаль в точке касания идёт через оба центра). Силу тяжести не учитываем: в

условии о ней ничего нет, речь только о силах, с которыми резинка стягивает цилиндры. Прямые участки резинки параллельны сторонам CA и CB, так что все четыре силы составляют с вертикалью угол 30°. Первый закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y:

$$2T\cos 30^\circ - 2N\cos 30^\circ = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = T.$$

Горизонтальные проекции попарно сокращаются по симметрии.

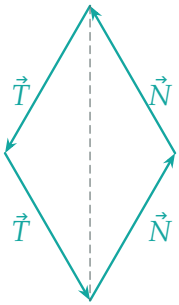


Силы на верхний цилиндр: натяжение T на концах дуги и давление N соседей в точках касания; все под 30° к вертикали.

4. Ответ и второй взгляд. Силы давления цилиндров друг на друга

$$N = T = (2\pi - 1)\,kR \approx 5{,}28\,kR.$$

Тот же результат даёт многоугольник сил (рисунок): сумма двух натяжений $\sqrt{3}\,T$ направлена вниз, сумма двух давлений $\sqrt{3}\,N$ — вверх, они уравновешены. Для нижних цилиндров по симметрии всё то же самое: каждую пару цилиндров сжимает сила $N = T$.



Многоугольник сил на верхний цилиндр замкнут: ромб, у которого стороны T и N попарно параллельны, — значит, $N = T$.

Обратите внимание. Сила взаимодействия цилиндров равна натяжению резинки, а не $\sqrt{3}\,T$: на каждый цилиндр давят два соседа, и сумму $\sqrt{3}\,T$ они делят между собой под углом.

Проверка. Размерность: $[kR] = \text{Н/м} \cdot \text{м} = \text{Н}$. Знак: $2\pi - 1 \approx 5{,}28 > 0$ — кольцо действительно растянуто ($L \approx 12{,}3R > 7R$). Если бы недеформированная длина была $L = (6 + 2\pi)R$, кольцо было бы не натянуто и цилиндры не давили бы друг на друга: $N = k(L - L) = 0$.

Смысл: охват цилиндров всегда даёт ровно одну окружность, сколько бы цилиндров ни было, — поэтому длина кольца считается в одну строку.

Ответ. $N = k\,(2\pi R + 6R - 7R) = (2\pi - 1)\,kR \approx 5{,}28\,kR$ (равна силе натяжения кольца).