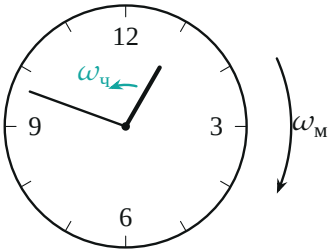
Сломанные часы

Задача 4. [ИОШ 2023/24, 9 класс, задача 4] После того как часы показали 12 часов ночи, что-то пошло не так, и часовая стрелка стала двигаться назад (противоположно обычному направлению) с втрое большей, чем раньше, угловой скоростью. Минутная стрелка продолжала идти правильно. Сколько раз за следующие сутки минутная стрелка на этих часах оказывалась перпендикулярной часовой стрелке? Ответ обосновать.



Поясняющий рисунок: минутная стрелка (тонкая) идёт по часовой стрелке, сломанная часовая (толстая) — против, втрое быстрее, чем раньше.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Перпендикулярность стрелок зависит только от угла между ними, т.е. от поворота минутной стрелки относительно часовой. Удобно перейти в систему отсчёта, связанную с часовой стрелкой: в ней минутная стрелка вращается с относительной угловой скоростью — разностью угловых скоростей, а так как стрелки идут навстречу, скорости складываются. За каждый полный оборот относительно часовой стрелки минутная дважды оказывается к ней перпендикулярной. Это задача на относительное вращательное движение (сложение угловых скоростей).

Обозначения. Углы стрелок $\varphi_м$, $\varphi_ч$ отсчитываем от отметки 12 по ходу обычных часов, время t — в часах от полуночи; $\omega_м$, $\omega_ч$ — угловые скорости (со знаком), $\theta = \varphi_м - \varphi_ч$ — угол минутной стрелки относительно часовой.

1. Угловые скорости. Минутная стрелка делает оборот за час: $\omega_м = 2\pi$ рад/ч. Исправная часовая делала оборот за 12 часов, $\frac{2\pi}{12}$ рад/ч; сло-

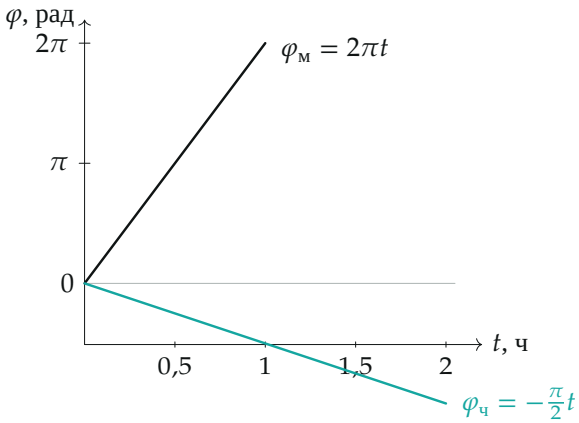
манная идёт назад втрое быстрее:

$$\omega_{\text{ч}} = -3 \cdot \frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{2} \text{ рад/ч}$$

— один оборот назад за 4 часа.

2. Углы стрелок. В полночь обе стрелки на 12: $\varphi_{\text{м}}(0) = \varphi_{\text{ч}}(0) = 0$. Вращение равномерное, поэтому

$$\varphi_{\text{м}} = 2\pi t, \qquad \varphi_{\text{ч}} = -\frac{\pi}{2}\, t.$$



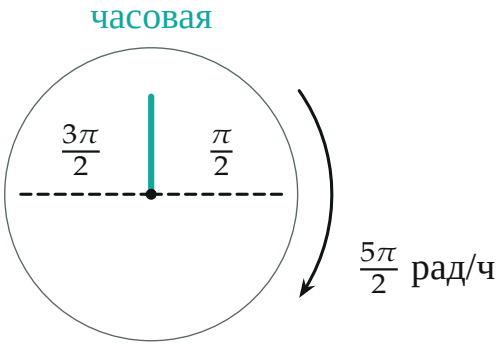
Углы стрелок за первые два часа: минутная уходит вперёд, часовая — назад; расстояние между прямыми растёт со скоростью $\frac{5\pi}{2}$ рад/ч.

3. Относительное вращение. Угол между стрелками

$$\theta = \varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{ч}} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)t = \frac{5\pi}{2}\, t.$$

Относительно часовой стрелки минутная делает полный оборот за $T_{\text{отн}} = \dfrac{2\pi}{5\pi/2} = 0{,}8$ ч $= 48$ мин. За сутки — $\dfrac{24}{0{,}8} = 30$ относительных оборотов. Иначе: минутная стрелка делает 24 оборота вперёд, часовая — 6 назад, навстречу друг другу, и встречаются они $24 + 6 = 30$ раз.

Ровно целое число, поэтому через сутки стрелки снова совпадают на 12.

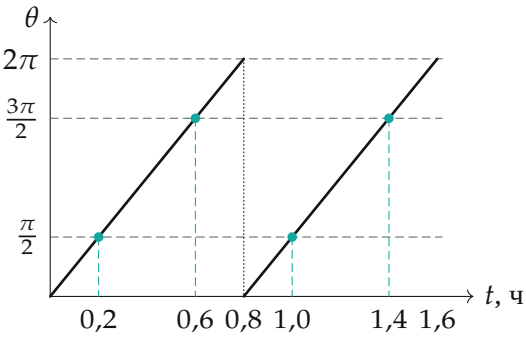


В системе отсчёта часовой стрелки минутная вращается с угловой скоростью $\frac{5\pi}{2}$ рад/ч и за оборот дважды становится перпендикулярной (штриховые положения).

4. Моменты перпендикулярности. Стрелки перпендикулярны, когда $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\frac{5\pi}{2}\, t_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \Longrightarrow \quad t_k = 0{,}2 + 0{,}4\, k \text{ ч.}$$

Нужно $0 < t_k < 24$: $k = 0, 1, \ldots, 59$ (при $k = 59$ $t = 23{,}8$ ч, при $k = 60$ уже 24,2 ч). Всего 60 моментов — по два на каждый из 30 относительных оборотов. Концы суток $t = 0$ и $t = 24$ ч — моменты совпадения стрелок, а не перпендикулярности, поэтому на границах ничего не теряется и не считается дважды.



Угол минутной стрелки относительно часовой (по модулю 2π) за первые 1,6 ч: бирюзовые точки — перпендикулярность, по две на каждый относительный оборот (48 минут).

Обратите внимание. Скорости складываются, а не вычитаются: стрелки идут навстречу. При исправных часах относительная скорость $2\pi - \frac{2\pi}{12}$, за сутки 22 относительных оборота и 44 перпендикулярности; здесь стрелки «встречаются» чаще.

Проверка. Пересчёт перебором (python): угол между стрелками через каждые доли секунды за сутки — косинус угла меняет знак ровно 60 раз. Размерность: ωt — радианы. Первый момент: $t = 0{,}2$ ч $= 12$ мин — минутная стрелка на «12 минут» (72°), часовая ушла назад на $\frac{\pi}{2} \cdot 0{,}2$ рад $= 18^\circ$; угол $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$.

Смысл: число перпендикулярностей — удвоенное число встреч стрелок, а встреч при движении навстречу — сумма их оборотов.

Ответ. 60 раз (стрелки встречаются $24 + 6 = 30$ раз за сутки, и между встречами дважды перпендикулярны; моменты $t = 0{,}2 + 0{,}4k$ ч, $k = 0, \ldots, 59$).