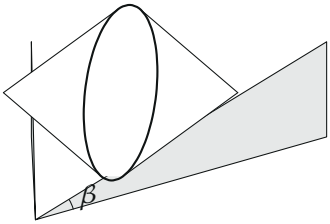
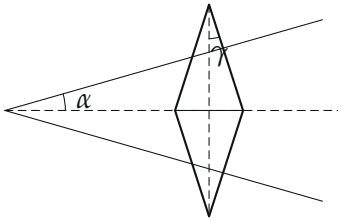
Двойной конус на дощечках

Задача 5. [ИОШ 2023/24, 9 класс, задача 5] Есть два одинаковых конуса с углом при вершине 2γ. Конусы склеили основаниями и положили на две одинаковые дощечки в форме прямоугольных треугольников с одним из острых углов β. Дощечки расположили перпендикулярно земле так, что угол между ними равен 2α (правый рисунок — вид сверху). Описать поведение конусов в зависимости от углов α, β и γ.

1. Описать поведение конусов в зависимости от углов α, β и γ.
2. При каком соотношении углов конусы будут находиться в равновесии?
3. При каком соотношении углов они будут двигаться вверх, а при каком вниз?





▲ **Решение. Что происходит.** Это знаменитый «двойной конус, катящийся вверх». Дощечки расходятся и поднимаются. Когда конусы катятся к широкой части «рогатки», точки опоры поднимаются вместе с дощечками, но одновременно расходятся в стороны — к вершинам конусов, где конусы тоньше, и ось конусов опускается относительно точек опоры. Что победит, решает знак изменения высоты центра тяжести. Трения качения нет, конусы катятся без проскальзывания, сила трения работы не совершает — значит, конусы движутся туда, где потенциальная энергия Mgz_C меньше, т.е. центр тяжести ниже. Это задача на устойчивость равновесия: сравнить два вклада в смещение центра тяжести.

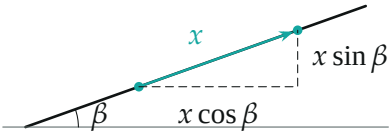
Обозначения. X — горизонтальная ось вдоль биссектрисы угла между дощечками, Y — горизонтальная ось вдоль оси конусов (она перпендикулярна биссектрисе по симметрии), z — вверх. x — малое перемещение точки касания вдоль края дощечки; r — радиус сечения конуса в

точке касания; z_C — высота центра тяжести (он на оси, в центре общего основания). Считаем, как организаторы, что точка касания лежит на нижней образующей конуса.

1. Подъём дощечки. Край дощечки — гипотенуза треугольника, наклонённая к земле под углом β. Смещение точки касания на x вдоль края поднимает её на

$$\Delta h_1 = x \sin\beta,$$

а по горизонтали — на $x\cos\beta$ (вдоль линии дощечки на виде сверху).

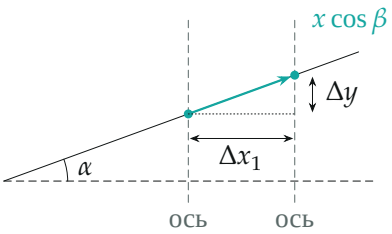


Край дощечки сбоку: точка касания сдвигается на x и поднимается на $x\sin\beta$.

2. Точка касания уходит к вершине конуса. На виде сверху край дощечки составляет угол α с биссектрисой. Горизонтальное смещение $x\cos\beta$ вдоль него раскладывается на сдвиг оси конусов вдоль биссектрисы и сдвиг точки касания вдоль оси конусов:

$$\Delta x_1 = x\cos\beta\cos\alpha, \qquad \Delta y = x\cos\beta\sin\alpha = \Delta x_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Расстояние между дощечками растёт, и точки касания уходят от центра конусов на Δy каждая.

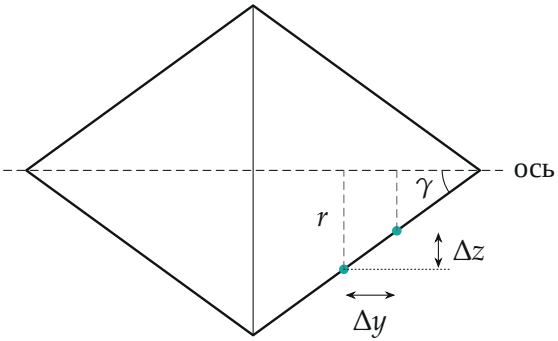


Вид сверху на одну дощечку: ось конусов (штриховая вертикаль) сдвигается на Δx_1, точка касания вдоль оси — на Δy.

3. Ось опускается относительно точки касания. Радиус конуса убывает к вершине: образующая составляет с осью угол γ (половина угла при вершине). При сдвиге точки касания вдоль оси на Δy к вершине радиус в ней уменьшается на

$$\Delta z = \Delta y \operatorname{tg}\gamma = x \cos\beta \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma,$$

и на столько же ось (а с ней центр тяжести) опускается относительно точки касания.



Сечение конусов вертикальной плоскостью через ось: точка касания на нижней образующей сдвинулась к вершине на Δy, радиус уменьшился на $\Delta z = \Delta y \operatorname{tg}\gamma$.

4. Высота центра тяжести. Центр тяжести выше точки касания на r, поэтому

$$\Delta z_C = \Delta h_1 - \Delta z = x\,(\sin\beta - \cos\beta \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma) = x \cos\beta\,(\operatorname{tg}\beta - \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma).$$

Множитель $x \cos\beta > 0$ при движении вверх по дощечкам, поэтому всё решает знак скобки. Скобка от положения конусов не зависит, так что z_C меняется линейно с перемещением.

Пункт 1. Поведение. При движении вверх по дощечкам центр тяжести может опускаться, подниматься или оставаться на месте — в зависимости от знака $\operatorname{tg}\beta - \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$. Отпущенные конусы катятся туда, где центр тяжести ниже.

Пункт 2. Равновесие. $\Delta z_C = 0$ при любом x, если

$$\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma.$$

Тогда конусы находятся в безразличном равновесии в любом месте дощечек.

Пункт 3. Вверх или вниз. При $\operatorname{tg}\beta < \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$ подъём по дощечкам опускает центр тяжести — конусы сами катятся вверх (кажущийся парадокс). При $\operatorname{tg}\beta > \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$ — катятся вниз, как обычные тела.

Обратите внимание. «Вверх» относится к точкам касания, а не к центру тяжести: центр тяжести при этом опускается, и закон сохранения энергии не нарушен.

Проверка. Пределы: $\alpha = 0$ (дощечки параллельны) — скобка $\operatorname{tg}\beta > 0$, конусы скатываются вниз, как цилиндр с горки; $\beta = 0$ (дощечки горизонтальны, но расходятся) — конусы катятся к расходящемуся концу. Точный расчёт (python) без допущения о нижней образующей: высота оси, при которой конус касается наклонного края, при $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$ ($\alpha = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}6$) не меняется при сдвиге конусов (0,684137 во всех трёх положениях), при β на 10 % меньше — убывает, на 10 % больше — растёт. Условие равновесия точное.

Смысл: конусы «катятся вверх», когда раздвигание дощечек опускает ось быстрее, чем подъём дощечек её поднимает.

Ответ. 1) при движении по дощечкам вверх центр тяжести конусов опускается, поднимается или остаётся на месте — по знаку $\operatorname{tg}\beta - \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$; 2) безразличное равновесие при $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$; 3) при $\operatorname{tg}\beta < \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$ конусы катятся вверх, при $\operatorname{tg}\beta > \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma$ — вниз.