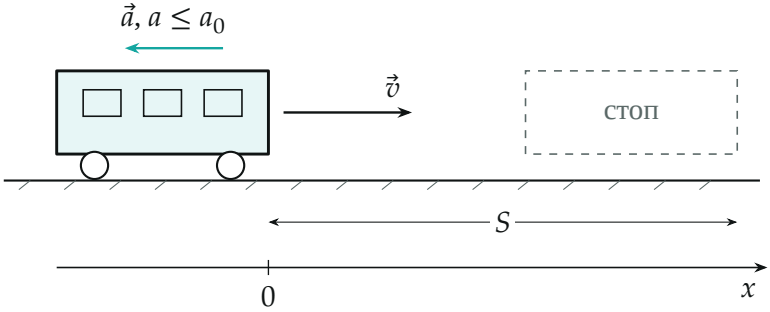
Безопасное торможение поезда

Задача 1. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Считается, что безопасным для пассажиров железной дороги является ускорение $a_0 = 1$ м/с^2. Поезд едет со скоростью $v = 80$ км/ч. Найти минимальный тормозной путь, безопасный для пассажиров, и наименьшее время торможения поезда.

1. Найдите минимальный тормозной путь, безопасный для пассажиров.
2. Найдите наименьшее время торможения поезда.



Поясняющий рисунок. Поезд со скоростью v тормозит с ускорением, направленным против скорости; по модулю ускорение не больше a_0.

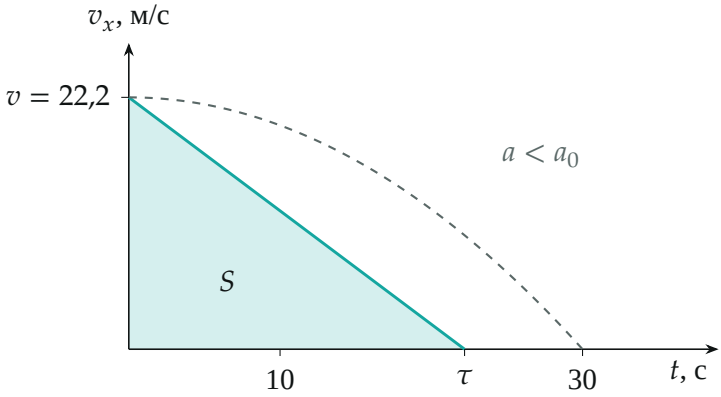
▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на равнозамедленное движение. Пассажирам опасно только большое ускорение, поэтому быстрее всего и на самом коротком пути поезд останавливается, когда тормозит с наибольшим допустимым ускорением a_0 всё время торможения. Меньшее ускорение растягивает и время, и путь.

Обозначения. v — начальная скорость; a_0 — допустимое ускорение; τ — время торможения; S — тормозной путь. Ось x направим по скорости поезда, начало — в точке начала торможения (рисунок выше).

1. Перевод скорости. В одном часе 3600 с, в километре 1000 м:

$$v = 80\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{80 \cdot 1000\ \text{м}}{3600\ \text{с}} = 22{,}2\ \text{м/с}.$$

2. Почему торможение с a_0 — самое быстрое. Скорость поезда за время торможения падает от v до нуля, а ускорение по модулю показывает, на сколько она падает за секунду. Если модуль ускорения в какие-то моменты меньше a_0, то за эти секунды скорость падает меньше, чем могла бы, и до нуля она дойдёт позже. На графике скорости (ниже) площадь под графиком — путь: при любом допустимом торможении график $v(t)$ лежит не ниже прямой с наклоном a_0, значит, и площадь под ним не меньше.



Скорость при торможении с a_0 (бирюзовая прямая) и при торможении, где ускорение местами меньше (пунктир). Площадь под графиком — путь; у бирюзовой прямой она меньше, и до нуля она доходит раньше.

3. Время торможения. Кинематический закон скорости при равноускоренном движении в проекции на ось x: $v_x(t) = v - a_0 t$ (ускорение направлено против оси, его проекция $-a_0$). Поезд останавливается, когда $v_x(\tau) = 0$:

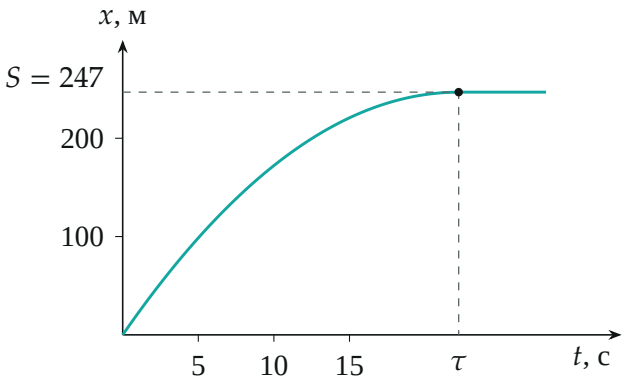
$$\tau = \frac{v}{a_0} = \frac{22{,}2\ \text{м/с}}{1\ \text{м/с}^2} = 22{,}2\ \text{с}.$$

4. Тормозной путь. Закон движения в проекции на x: $x(t) = vt - \dfrac{a_0 t^2}{2}$. При $t = \tau$

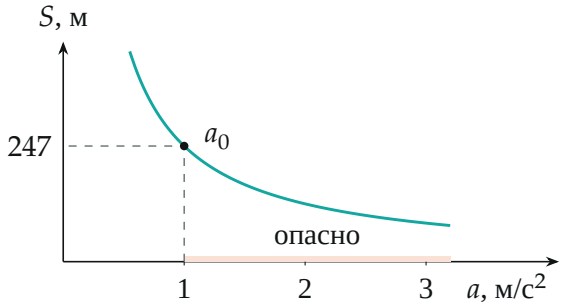
$$S = v\tau - \frac{a_0\tau^2}{2} = \frac{v^2}{a_0} - \frac{v^2}{2a_0} = \frac{v^2}{2a_0} = \frac{(22{,}2\ \text{м/с})^2}{2 \cdot 1\ \text{м/с}^2} = 247\ \text{м}.$$

Знак плюс: поезд всё время едет в положительном направлении оси, путь равен координате остановки.

Второй способ — площадь под графиком скорости (треугольник на рисунке выше): $S = \frac{1}{2} v\tau = \frac{v^2}{2a_0}$, то же самое.



Координата поезда: парабола до остановки в момент $\tau = 22{,}2$ с, дальше поезд стоит. Касательная в вершине горизонтальна — скорость в конце нулевая.



Путь $S = v^2/(2a)$ при $v = 22{,}2$ м/с; правее a_0 — опасно, наименьший безопасный путь при $a = a_0$.

Обратите внимание. Скорость обязательно перевести в м/с: формула $S = v^2/(2a_0)$ с $v = 80$ «км/ч» и $a_0 = 1$ м/с^2 даёт бессмыслицу. Ответ

«наименьшее время» и «наименьший путь» относятся к одному и тому же режиму — торможению с $a = a_0$ от начала до конца.

Проверка. Размерности: $[v/a_0] = (\text{м/с})/(\text{м/с}^2) = \text{с}$, $[v^2/a_0] = (\text{м}^2/\text{с}^2)/(\text{м/с}^2) = \text{м}$. Средняя скорость при равнозамедленном торможении равна $v/2 = 11{,}1$ м/с, за 22,2 с это 247 м — сходится. При вдвое большей скорости путь вырос бы вчетверо, а время вдвое: путь растёт как квадрат скорости, поэтому скорость поездов у станций и ограничивают.

Ответ. 1) $S = \dfrac{v^2}{2a_0} \approx 247$ м; 2) $\tau = \dfrac{v}{a_0} \approx 22{,}2$ с.