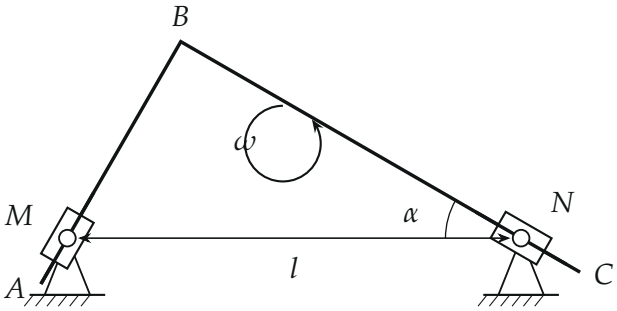
Угловой стержень в двух муфтах

Задача 3. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Два стержня AB и BC, жёстко скреплённые в точке B под прямым углом друг к другу, проходят через муфты, которые прикреплены шарнирно к неподвижным точкам M и N и могут вращаться относительно них (см. рисунок). Система стержней ABC вращается с угловой скоростью ω, оставаясь все время в одной плоскости. Найти скорость и ускорение точки B в тот момент, когда угол между стержнем BC и отрезком MN равен $\alpha = 30°$. Расстояние MN равно l.

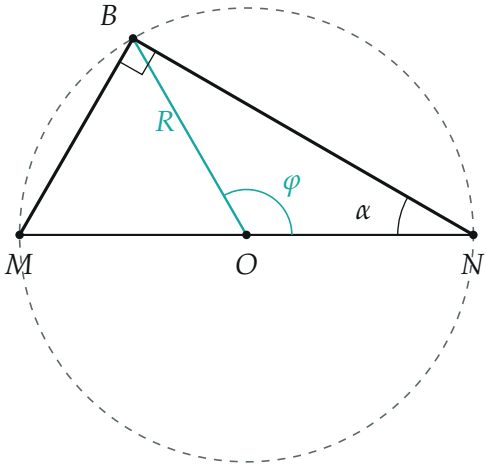


▲ **Решение. Что происходит.** Задача кинематики: по связям найти траекторию точки, а уже потом её скорость и ускорение. Стержни скользят в муфтах, поэтому прямая AB всё время проходит через M, прямая BC — через N, и угол между ними прямой. Из прямоугольного треугольника MBN с гипотенузой MN видно: точка B всё время на окружности с диаметром MN. Главная тонкость — угловая скорость B на этой окружности не ω, а 2ω: стержень поворачивается как вписанный угол, а точка B — как центральный.

Обозначения. O — середина MN, центр окружности; $R = l/2$ — её радиус; φ — угол MOB (центральный); α — угол BNM; Ω — угловая скорость точки B вокруг O.

1. Траектория. Угол MBN прямой. Вершина прямого угла, стороны которого проходят через концы отрезка MN, лежит на окружности с диаметром MN (обратная теорема о вписанном угле, опирающемся на

диаметр). Значит, B движется по окружности радиуса $R = l/2$ с центром O.



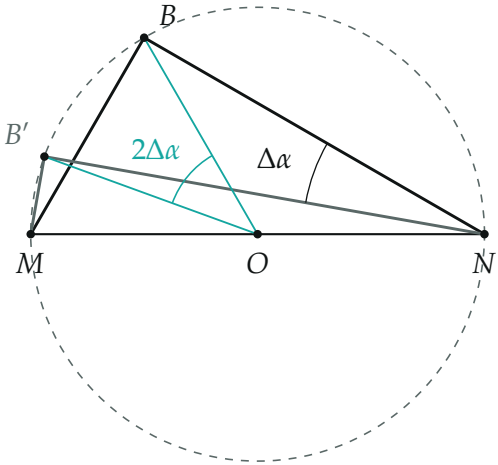
Прямой угол MBN опирается на диаметр MN: точка B лежит на окружности с центром O и радиусом $R = l/2$. Угол при N — вписанный α, угол при O — центральный, $\varphi = 180^\circ - 2\alpha$.

2. Связь углов. Треугольник OBN равнобедренный ($OB = ON = R$), поэтому $\angle OBN = \alpha$, а внешний угол при O — угол MOB — равен сумме двух других: $\angle MOB = 2\alpha$. Тогда угол BON, отсчитанный от луча ON,

$$\varphi = 180^\circ - 2\alpha.$$

Стержень BC поворачивается вместе со всей системой с угловой скоростью ω, значит, угол α меняется со скоростью ω (по модулю). Центральный угол φ меняется вдвое быстрее:

$$\Omega = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = 2\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right| = 2\omega.$$



Стержень BC повернулся вокруг N на $\Delta\alpha = 20°$ — точка B ушла по окружности в B' на центральный угол $2\Delta\alpha = 40°$.

3. Второй способ — координаты. Ось x — по MN из M, ось y — вверх. Из треугольника MBN: $MB = l\sin\alpha$, а стержень AB наклонён к MN под углом $90° - \alpha$. Тогда

$$x_B = l\sin\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{l}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad y_B = l\sin\alpha\cos\alpha = \frac{l}{2}\sin 2\alpha.$$

Относительно центра $O\,(l/2;\,0)$ это $\left(-\frac{l}{2}\cos 2\alpha;\ \frac{l}{2}\sin 2\alpha\right)$ — точка на окружности радиуса $l/2$, повёрнутая на угол, в который входит 2α. При α, меняющемся со скоростью ω, этот угол меняется со скоростью 2ω — тот же результат.

4. Скорость и ускорение. Угол α меняется равномерно, значит, B движется по окружности равномерно с угловой скоростью $\Omega = 2\omega$. Скорость при равномерном движении по окружности

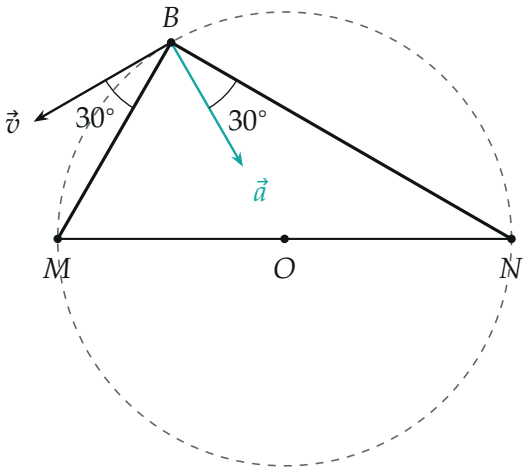
$$v = \Omega R = 2\omega\cdot\frac{l}{2} = \omega l,$$

ускорение только центростремительное:

$$a = \Omega^2 R = (2\omega)^2\cdot\frac{l}{2} = 2\omega^2 l.$$

Ни то ни другое от α не зависит.

5. Направления. Скорость — по касательной к окружности в точке B, ускорение — по радиусу BO к центру. Угол между касательной и хордой BM (стержнем AB) равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду, то есть углу $BNM = \alpha = 30°$. Треугольник OBM равнобедренный с углом $MOB = 2\alpha = 60°$, значит, равносторонний: ускорение $\vec{a}$ (вдоль BO) образует со стержнем AB угол 60°, а со стержнем BC — угол $90° - 60° = 30°$ и лежит между стержнями.



Скорость точки B — по касательной к окружности, под 30° к стержню AB; ускорение — к центру O, между стержнями: 60° к AB и 30° к BC. Направление $\vec{v}$ показано для вращения против часовой стрелки.

Обратите внимание. Сказать «точка B движется по окружности с той же угловой скоростью ω» — ошибка: ω — угловая скорость поворота стержней, то есть вписанного угла, а центральный угол меняется вдвое быстрее. У организаторов в ответе именно так: $v = \omega l/2$, $a = \omega^2 l/2$; верно $v = \omega l$, $a = 2\omega^2 l$ (направления у них указаны верно).

Проверка. Размерности: $[\omega l]$ = м/с, $[\omega^2 l]$ = м/с^2. Связь $a = v^2/R$: $(\omega l)^2/(l/2) = 2\omega^2 l$ — сходится. Предельный случай: за время, пока стержни повернутся на 90° (от $\alpha = 90°$ до $\alpha = 0$), точка B пройдёт от M до N всю полуокружность, то есть 180° — центральный угол действительно вдвое больше.

Ответ. $v = \omega l$, $a = 2\omega^2 l$ при любом α; скорость направлена по касательной к окружности с диаметром MN под углом 30° к стержню AB, ускорение — к центру этой окружности, между стержнями, под углом 60° к AB и 30° к BC.