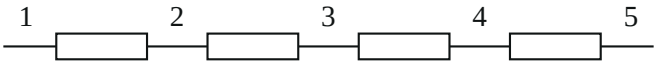
Цепь из резисторов и неидеального вольтметра

Задача 4. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Имеется электрическая цепь, состоящая из четырёх одинаковых резисторов, соединённых последовательно (см. рисунок). К цепи подключают идеальный источник постоянного электрического напряжения. Если к точкам 1 и 2 этой цепи подключить вольтметр, он покажет напряжение $U_{12} = 0{,}95$ В. Если тот же вольтметр подключить к точкам 1 и 5, он покажет напряжение $U_{15} = 4$ В. Что покажет тот же вольтметр, если подключить его к точкам 1 и 3?

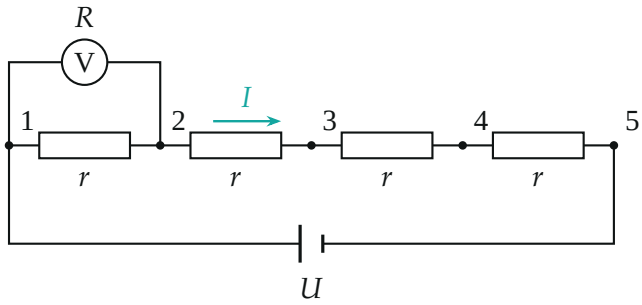


▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на неидеальный вольтметр. Будь вольтметр идеальным, напряжения на одинаковых резисторах были бы равны, и U_{12} было бы ровно $U_{15}/4 = 1$ В. Вольтметр показал меньше — значит, у него конечное сопротивление R: подключённый параллельно участку, он уменьшает сопротивление этого участка и «забирает» себе меньшую долю напряжения. Из двух показаний находим отношение r/R, затем считаем третье показание.

Обозначения. r — сопротивление каждого резистора; R — сопротивление вольтметра; U — напряжение идеального источника, подключённого к точкам 1 и 5; $x = r/R$.

1. Вольтметр на точках 1 и 5. Источник идеальный, его напряжение не зависит от тока, поэтому вольтметр, подключённый прямо к его выводам, показывает U:

$$U = U_{15} = 4 \text{ В}.$$



Вольтметр на точках 1–2: он параллелен первому резистору, а последовательно с этой парой стоят ещё три резистора r.

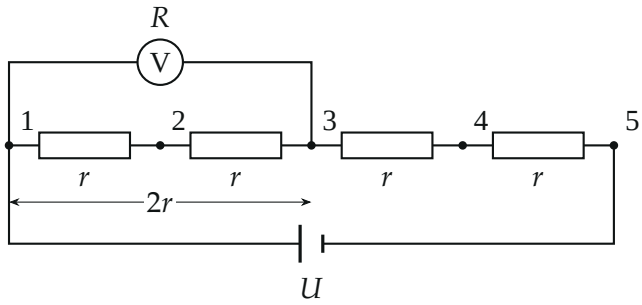
2. Вольтметр на точках 1 и 2. Вольтметр и первый резистор соединены параллельно, их общее сопротивление $\dfrac{rR}{r+R}$. Последовательно с ними ещё $3r$. Напряжения на последовательных участках делятся пропорционально сопротивлениям (ток один и тот же):

$$U_{12} = U\,\frac{\dfrac{rR}{r+R}}{3r+\dfrac{rR}{r+R}} = U\,\frac{R}{3(r+R)+R} = \frac{U}{4+3x}.$$

Отсюда

$$\frac{U_{15}}{U_{12}} = 4+3x, \qquad x = \frac{r}{R} = \frac{1}{3}\left(\frac{U_{15}}{U_{12}}-4\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{0{,}95}-4\right) = 0{,}0702.$$

Сопротивление вольтметра примерно в 14 раз больше сопротивления резистора.



Вольтметр на точках 1–3: теперь он параллелен двум резисторам (участок $2r$), последовательно с ними — ещё $2r$.

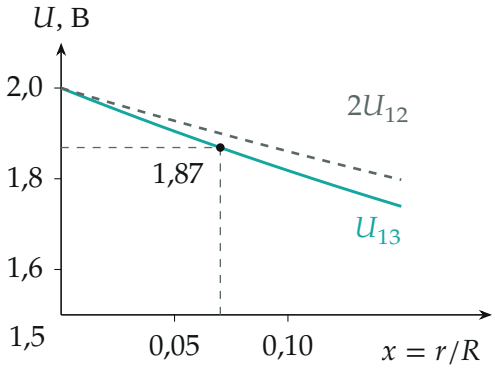
3. Вольтметр на точках 1 и 3. Теперь вольтметр параллелен участку $2r$, их общее сопротивление $\dfrac{2rR}{2r+R}$, последовательно с ними ещё $2r$. Тем же делением напряжения:

$$U_{13} = U\,\frac{\dfrac{2rR}{2r+R}}{2r+\dfrac{2rR}{2r+R}} = U\,\frac{R}{2r+2R} = \frac{U}{2+2x}.$$

Подставим x из пункта 2 и $U = U_{15}$:

$$U_{13} = \frac{U_{15}}{2+\frac{2}{3}\left(\frac{U_{15}}{U_{12}}-4\right)} = \frac{3U_{15}U_{12}}{2\,(U_{15}-U_{12})} = \frac{3\cdot 4\cdot 0{,}95}{2\cdot 3{,}05}\ \text{В} = 1{,}87\ \text{В}.$$

Обратите внимание. Показания вольтметра на разных участках не складываются: $U_{12}+U_{23} \neq U_{13}$, потому что при каждом подключении меняется сама цепь. Поэтому нельзя считать $U_{13} = 2U_{12} = 1{,}9$ В — это верно лишь для идеального вольтметра (было бы 2 В).



Показание на 1–3 (бирюзовая кривая) и удвоенное показание на 1–2 (пунктир) в зависимости от $x = r/R$ при $U = 4$ В. При $x = 0$ (идеальный вольтметр) обе дают 2 В; при $x = 0{,}07$ они расходятся.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{В}\cdot\text{В}}{\text{В}} = \text{В}$. Предел: при идеальном вольтметре $U_{12} = U_{15}/4$, и формула даёт $U_{13} = \dfrac{3U_{15}\cdot U_{15}/4}{2\cdot\frac{3}{4}U_{15}} = \dfrac{U_{15}}{2} = 2$ В, как и должно быть. Ответ меньше 2 В: вольтметр снова занижает показание, причём относительно сильнее, чем на 1–2 ($1{,}87/2 = 0{,}934$ против $0{,}95/1 = 0{,}95$): он шунтирует участок вдвое большего сопротивления.

Ответ. $U_{13} = \dfrac{3U_{15}U_{12}}{2(U_{15}-U_{12})} \approx 1{,}87$ В.