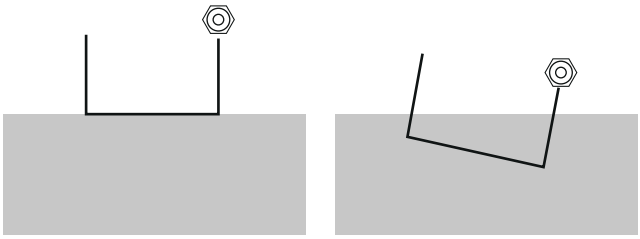
Пластиковый контейнер на воде

Задача 6. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 10 класс, задача 6] На поверхность воды поставили очень лёгкий пластиковый контейнер для пищевых продуктов. Контейнер плавает горизонтально. На один из бортов контейнера прикрепили тело с массой, сравнимой с массой контейнера (например, прикрепили с помощью скотча крупную гайку; см. рисунок). Контейнер плавает практически горизонтально. Если же в контейнер налить небольшое количество воды, то он сильно наклонится в сторону тела. Объясните эти эксперименты.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие плавающего тела: сумма сил и сумма моментов сил равны нулю. Сила Архимеда приложена в центре погружённой части, и плавающее тело наклоняется ровно настолько, чтобы этот центр встал на одну вертикаль с центром тяжести. Всё решает вопрос: на какой угол надо наклонить контейнер, чтобы центр погружённой части сместился к гайке? У пустого контейнера погружённая часть — тонкий слой, и малый наклон перекраивает её сильно. С водой внутри сила Архимеда за вычетом веса налитой воды от малого наклона не смещается вовсе — и контейнер валится сильно.

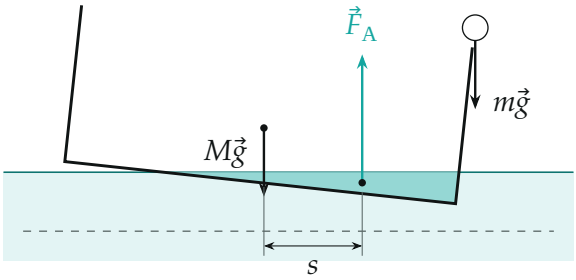
Обозначения. l — ширина дна контейнера; M — масса контейнера, m — масса гайки; s — смещение общего центра тяжести контейнера с гайкой от середины дна по горизонтали; d — средняя глубина погружения пустого контейнера; ρ — плотность воды; α — угол наклона.

1. Где должна быть приложена сила Архимеда. На контейнер с гайкой действуют силы тяжести Mg (в середине контейнера) и mg (у борта), и сила Архимеда F_A. Условие сил: $F_\text{A} = (M + m)g$. Условие моментов

относительно центра тяжести системы: момент силы Архимеда равен нулю, то есть она проходит через общий центр тяжести. При $m = M$ и гайке у самого борта

$$s = \frac{m \cdot \frac{l}{2}}{M + m} = \frac{l}{4},$$

— центр погружённой части должен уйти от середины дна на четверть ширины.

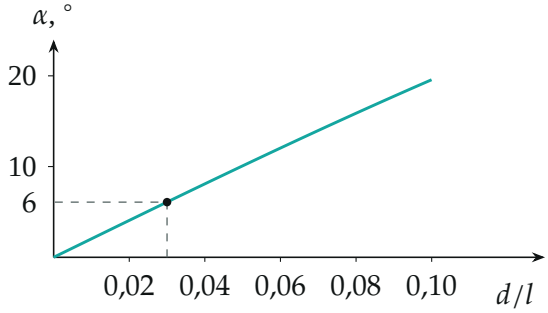


Пустой контейнер с гайкой (наклон 6°, рассчитан для $d/l = 0{,}03$; осадка увеличена для наглядности). Погружён только клин у правого борта (бирюзовый), сила Архимеда приложена в его центре — под общим центром тяжести.

2. Пустой контейнер: малый наклон. Контейнер очень лёгкий, поэтому из условия сил объём погружённой части мал: $\rho g\, ld\, b = (M+m)g$ (b — длина контейнера), то есть $d \ll l$. При наклоне правый край опускается на $l \tan\alpha$ относительно левого. Уже при $\tan\alpha \sim d/l$ (доли градуса–несколько градусов) левая часть дна выходит из воды и погружённой остаётся лишь клин у правого борта. Площадь сечения клина длиной L и глубиной h у борта равна $\frac{1}{2}Lh = ld$ (условие сил), центр его — на расстоянии $L/3$ от борта. Условие моментов: $\frac{l}{2} - \frac{L}{3} = s = \frac{l}{4}$, откуда $L = \frac{3}{4}l$, $h = \frac{2ld}{L} = \frac{8}{3}d$ и

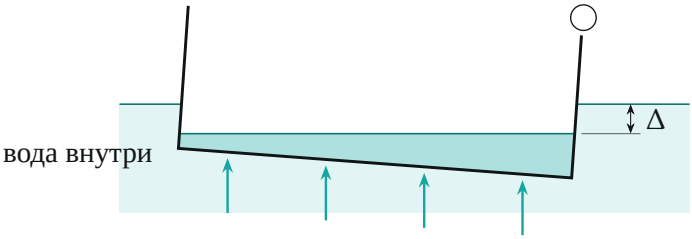
$$\tan\alpha = \frac{h}{L} = \frac{32}{9}\frac{d}{l}.$$

При $d/l = 0{,}03$ это $\tan\alpha = 0{,}11$, $\alpha \approx 6°$: контейнер стоит «практически горизонтально». Угол тем меньше, чем меньше осадка.



Угол наклона пустого контейнера с гайкой ($m = M$) в зависимости от относительной осадки, $\tan\alpha = \frac{32}{9}\frac{d}{l}$. *У лёгкого контейнера осадка — миллиметры при ширине дна в десятки сантиметров, угол — несколько градусов.*

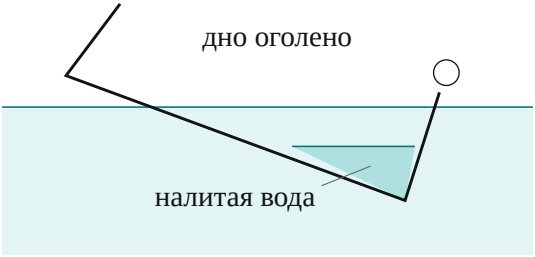
3. Контейнер с водой: наклон ничего не исправляет. Нальём воду. Её поверхность внутри горизонтальна, поверхность воды снаружи тоже. Пока дно целиком покрыто водой и изнутри, и снаружи, давление снаружи на каждую точку дна больше давления изнутри на $\rho g\Delta$, где Δ — разность уровней снаружи и внутри: обе глубины над точкой дна меняются вдоль дна одинаково, разность от точки не зависит. Значит, результирующая сила воды на дно (Архимед минус вес налитой воды) приложена посередине дна при любом малом наклоне. Момент силы тяжести гайки ей нечем уравновесить — контейнер поворачивается дальше.



Контейнер с водой: уровни внутри и снаружи горизонтальны, разность давлений на дно $\rho g\Delta$ одинакова по всему дну (бирюзовые стрелки равной длины). Результирующая приложена посередине и наклона не «чувствует».

4. Где наступает равновесие. Смещение точки приложения результирующей появляется, только когда наклон так велик, что вода внутри

собирается к низкому борту и оголяет высокую часть дна (или снаружи вода доходит до высоты борта). Для этого перепад высот вдоль дна $l\tan\alpha$ должен сравняться с глубиной налитой воды и полной осадкой, а они теперь не миллиметры, как у пустого контейнера, а значительно больше: $\tan\alpha \sim d_{\text{в}}/l$ с большим $d_{\text{в}}$ — угол большой. Кроме того, сама налитая вода при наклоне перетекает к низкому борту, к гайке, и добавляет момент в ту же сторону.



Равновесие с водой — при большом наклоне: налитая вода собралась у борта с гайкой, высокая часть дна над ней оголилась. Только теперь опора сместилась к гайке.

Обратите внимание. Дело не в том, что вода тяжелее гайки: её налито немного. Дело в том, что опора на воду у пустого контейнера — тонкий слой, который перекраивается малым наклоном, а с водой внутри разность давлений на дно от малого наклона не меняется.

Проверка. Предельные случаи. Без гайки ($s = 0$) пустой контейнер стоит ровно при любой осадке — формула даёт $\alpha = 0$ при $s = 0$ (клин не нужен). Чем легче контейнер (меньше d), тем горизонтальнее он стоит с гайкой: $\tan\alpha \propto d/l$. Так у организаторов: наклон, нужный для сдвига точки приложения силы Архимеда на размер порядка ширины, $\alpha \sim \arcsin(d/l)$ — мал при малой осадке и велик при большой.

Ответ. Плавающий контейнер наклоняется, пока центр погружённой части не встанет под общий центр тяжести. Пустой лёгкий контейнер погружён тонким слоем ($d \ll l$), и для сдвига точки приложения силы Архимеда к гайке на четверть ширины хватает малого угла $\tan\alpha = \frac{32}{9}\frac{d}{l}$ (при $m = M$). С водой внутри разность давлений на дно снаружи и

изнутри одинакова по всему дну и при малом наклоне приложена посередине, а сама вода перетекает к гайке; равновесие наступает лишь при большом наклоне, когда вода собирается у низкого борта.