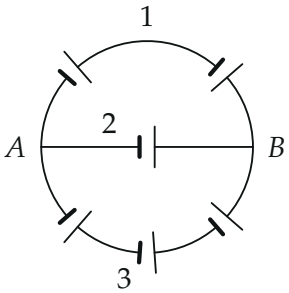
Шесть источников ЭДС

Задача 1. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 1] Шесть одинаковых источников ЭДС ε с внутренним сопротивлением r соединены в электрическую цепь так, как показано на рисунке. Найти силу электрического тока, текущего на участках 1, 2 и 3. В каком направлении — от A к B или от B к A — текут эти токи?



▲ **Решение. Что происходит.** Это три параллельные ветви между узлами A и B: на участке 1 — два источника, на участке 2 — один, на участке 3 — три, и все они включены «плюсом к B» (короткая толстая пластина — минус — со стороны A). Ветви с разной ЭДС борются друг с другом: ток пойдёт по кругу. Ключевые законы — закон Ома для участка цепи с ЭДС (одно напряжение U_{BA} на все три ветви) и закон сохранения заряда в узле B.

Обозначения. I_1, I_2, I_3 — токи на участках 1, 2, 3, положительное направление — от A к B (если ток выйдет отрицательным, он течёт от B к A); $U = \varphi_B - \varphi_A$ — напряжение между узлами. Источники на участке соединены последовательно, их ЭДС и внутренние сопротивления складываются: ветвь n одинаковых источников — это один источник ЭДС $n\varepsilon$ с сопротивлением nr (рис. 1).

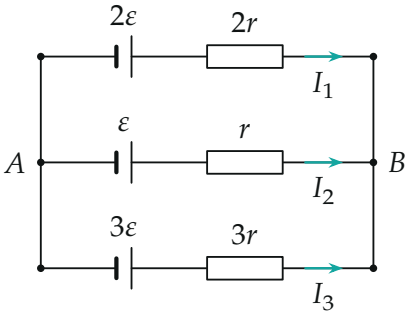


Рис. 1. Та же цепь, нарисованная как три параллельные ветви. Бирюзовые стрелки — выбранные положительные направления токов (от A к B).

1. Закон Ома для каждой ветви. Пройдём ветвь от A к B. Внутри источника, включённого «минусом к A», потенциал растёт на ЭДС; на сопротивлении по направлению тока — падает на $I \cdot R$. Поэтому для ветви с ЭДС $n\varepsilon$ и сопротивлением nr

$$\varphi_B = \varphi_A + n\varepsilon - I\,nr,$$

и для трёх ветвей

$$U = 2\varepsilon - 2rI_1, \qquad U = \varepsilon - rI_2, \qquad U = 3\varepsilon - 3rI_3.$$

Это верно при любых знаках токов: отрицательный ток просто означает, что на сопротивлении потенциал от A к B растёт.

2. Закон сохранения заряда для узла B. В постоянном режиме заряд в узле не накапливается: сколько тока втекает, столько вытекает. Все три тока выбраны втекающими в B:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

3. Напряжение U. Выразим токи из закона Ома и подставим в условие узла — останется одно неизвестное U:

$$I_1 = \frac{2\varepsilon - U}{2r}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon - U}{r}, \quad I_3 = \frac{3\varepsilon - U}{3r};$$

$$\frac{2\varepsilon - U}{2r} + \frac{\varepsilon - U}{r} + \frac{3\varepsilon - U}{3r} = 0.$$

Умножим на $6r$: $6\varepsilon - 3U + 6\varepsilon - 6U + 6\varepsilon - 2U = 0$, откуда

$$U = \frac{18}{11}\varepsilon.$$

Это промежуточное значение между ЭДС ветвей: $\varepsilon < U < 2\varepsilon$ (рис. 2).

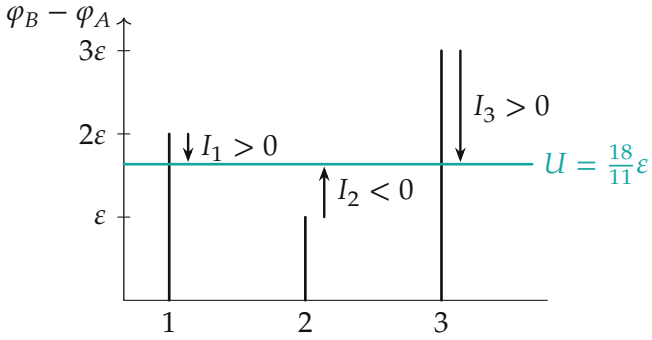


Рис. 2. Чёрные столбики — ЭДС ветвей 1, 2, 3, бирюзовая линия — общее напряжение U. Где ЭДС больше U, ток идёт от A к B (разность «падает» на Ir), где меньше — против.

4. Токи.

$$I_1 = \frac{2\varepsilon - \frac{18}{11}\varepsilon}{2r} = \frac{2\varepsilon}{11r},$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon - \frac{18}{11}\varepsilon}{r} = -\frac{7\varepsilon}{11r},$$

$$I_3 = \frac{3\varepsilon - \frac{18}{11}\varepsilon}{3r} = \frac{5\varepsilon}{11r}.$$

Знаки: $I_1 > 0$ и $I_3 > 0$ — на участках 1 и 3 ток идёт от A к B; $I_2 < 0$ — на участке 2 ток идёт от B к A, против ЭДС своего источника: его «продавливают» более сильные ветви. Истинная картина токов — на рис. 3.

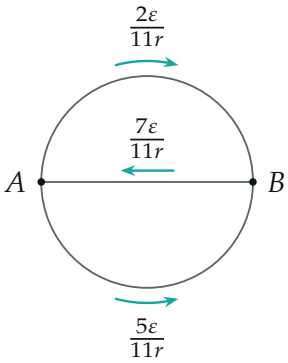


Рис. 3. Истинные направления токов: по участкам 1 и 3 — от A к B, по участку 2 — от B к A. В узле A: втекает $\frac{7\varepsilon}{11r}$, вытекает $\frac{2\varepsilon}{11r}+\frac{5\varepsilon}{11r}$.

Обратите внимание. Положительное направление тока выбирают заранее и одинаково для всех ветвей, а знак ответа сам говорит, куда ток течёт; угадывать направления до решения не нужно. И источник на участке 2 работает не генератором, а «потребителем»: ток через него идёт от плюса к минусу.

Ответ.

$$I_1=\frac{2\varepsilon}{11r}\ (A\to B),\quad I_2=\frac{7\varepsilon}{11r}\ (B\to A),\quad I_3=\frac{5\varepsilon}{11r}\ (A\to B)$$

Проверка. Размерность: ε/r — ток. Узел: $2-7+5=0$. Второй способ — законы Кирхгофа для контуров, без U: контур «участок 1 — участок 2» даёт $2\varepsilon-\varepsilon=2rI_1-rI_2$, то есть $\varepsilon=\frac{4\varepsilon}{11}+\frac{7\varepsilon}{11}$ — верно; контур «участок 3 — участок 1»: $3\varepsilon-2\varepsilon=3rI_3-2rI_1=\frac{15\varepsilon}{11}-\frac{4\varepsilon}{11}=\varepsilon$ — верно. Предел: если бы на всех участках было одинаковое число источников, все разности ЭДС были бы нулевыми и тока не было бы — и наша формула U дала бы $U=n\varepsilon$, $I=0$.

Смысл: напряжение между узлами — взвешенное среднее ЭДС ветвей (с весами $1/R$), а ток каждой ветви определяется тем, насколько её ЭДС отличается от этого среднего.

Ответ. $I_1=\frac{2\varepsilon}{11r}$, от A к B; $I_2=\frac{7\varepsilon}{11r}$, от B к A; $I_3=\frac{5\varepsilon}{11r}$, от A к B.