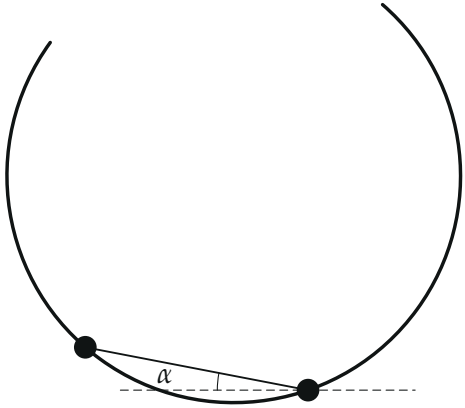
Два тела на стержне внутри сферы

Задача 4. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Внутри абсолютно гладкой сферы радиуса R находятся два маленьких тела с массами m и $2m$, связанными жёстким невесомым стержнем с длиной, равной радиусу сферы. Тела находятся в равновесии. Определить угол α между стержнем и горизонталью (см. рисунок).



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие твёрдого тела (система «два тела + стержень»). Сфера гладкая, поэтому её силы реакции направлены по нормали к поверхности — по радиусам, через центр сферы O. Главная идея — записать правило моментов относительно O: моменты сил реакции исчезают, остаётся только момент силы тяжести. Значит, центр тяжести системы лежит на вертикали через O, а дальше — чистая геометрия.

Обозначения. O — центр сферы; A — тело массы m, D — тело массы $2m$; C — центр тяжести системы; B — середина стержня AD; $\vec{N}_A$, $\vec{N}_D$ — силы реакции сферы.

1. Силы. На систему действуют $m\vec{g}$ (в A), $2m\vec{g}$ (в D) и силы реакции $\vec{N}_A$, $\vec{N}_D$, направленные к центру O (рис. 1). Сила, с которой стержень действует на тела, — внутренняя для системы, её не пишем.

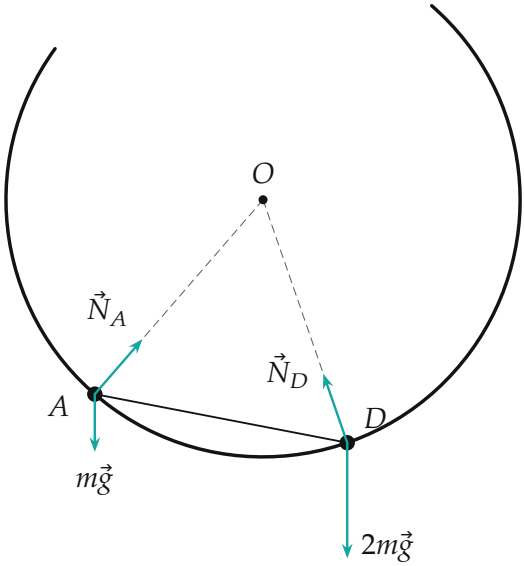


Рис. 1. Силы, действующие на систему. Линии действия $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_D$ проходят через центр O (пунктир).

2. Правило моментов относительно O**.** Тела в равновесии, поэтому сумма моментов внешних сил относительно любой оси равна нулю. Берём ось через O — зачем: линии действия $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_D$ через неё проходят, их плечи нулевые. Остаются силы тяжести. Пусть x_A, x_D — горизонтальные координаты тел (ось x вправо от O):

$$mg\,x_A + 2mg\,x_D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3mg\,x_C = 0, \qquad x_C = \frac{mx_A + 2mx_D}{3m}.$$

То есть центр тяжести C лежит на вертикали, проходящей через O. Он ближе к массивному телу, поэтому тело $2m$ ближе к этой вертикали и ниже, тело m — выше, как на рисунке условия.

3. Геометрия. Треугольник OAD равносторонний: $OA = OD = R$ (тела на сфере), $AD = R$ (длина стержня). Перпендикуляр OB из вершины на сторону делит её пополам и равен высоте треугольника:

$$OB = \frac{\sqrt{3}}{2}R, \qquad AB = BD = \frac{R}{2}.$$

Центр тяжести делит стержень в отношении масс, обратном: $AC : CD = 2m : m = 2 : 1$, то есть

$$AC = \frac{2}{3}R, \qquad BC = AC - AB = \frac{2}{3}R - \frac{1}{2}R = \frac{R}{6}.$$

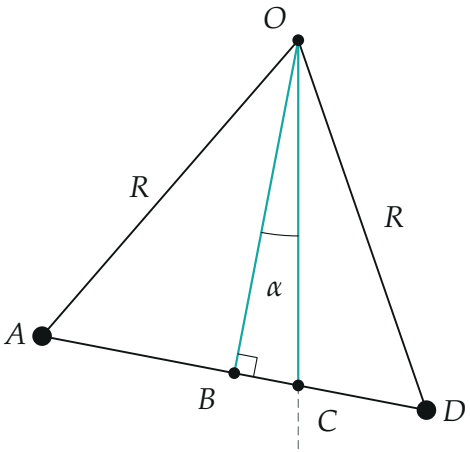


Рис. 2. Равносторонний треугольник OAD: OB — высота, OC — вертикаль через центр тяжести. Угол BOC равен α.

4. Угол. Отрезок OC вертикален, $OB \perp AD$. Угол между OB и вертикалью равен углу между AD и горизонталью — углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Значит, $\angle BOC = \alpha$, и из прямоугольного треугольника OBC (прямой угол при B):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{R/6}{\sqrt{3}R/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9} \approx 10{,}9^\circ.$$

5. Второй способ — координаты. Середина стержня B находится на расстоянии $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ от O в направлении, отклонённом от вертикали вниз на угол α (влево); стержень наклонён на α, вдоль него от B до тел по $\frac{R}{2}$ (рис. 3). Горизонтальные координаты:

$$x_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\alpha - \frac{R}{2}\cos\alpha, \qquad x_D = -\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\alpha + \frac{R}{2}\cos\alpha.$$

Правило моментов $mx_A + 2mx_D = 0$:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}R\sin\alpha + \frac{R}{2}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Совпало.

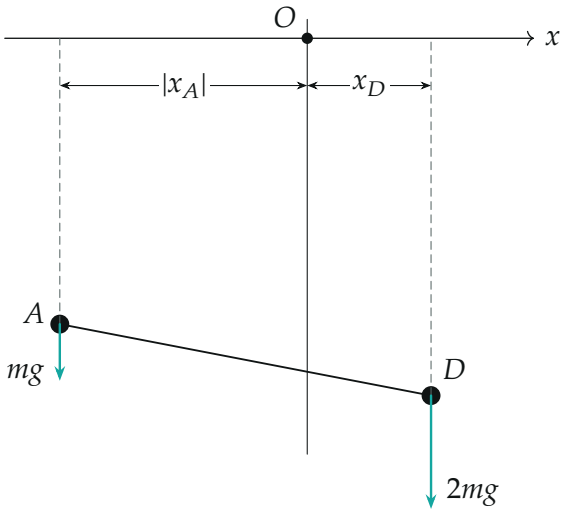


Рис. 3. Плечи сил тяжести относительно O: $mg\,|x_A| = 2mg\,x_D$, то есть $|x_A| = 2x_D$.

Обратите внимание. Угол α в ответе — угол стержня с горизонталью, и он не равен углу $\angle AOD = 60°$ и не зависит от R: вся задача — в положении центра тяжести на хорде. Если бы массы были равны, центр тяжести совпал бы с B и стержень стоял бы горизонтально.

Ответ. $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9},\ \ \alpha \approx 10{,}9°}$; более тяжёлое тело ниже.

Проверка. Предел: при равных массах $BC = 0$ и $\alpha = 0$ — горизонтальный стержень, как требует симметрия. Если масса $2m$ заменить на km, то $BC = \frac{R}{2}\cdot\frac{k-1}{k+1}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k-1}{\sqrt{3}(k+1)}$; при $k = 2$ это $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ — совпадает. Численно (python): тела в точках $(-0{,}655;\ -0{,}756)R$ и $(0{,}327;\ -0{,}945)R$, моменты $-0{,}655 + 2\cdot 0{,}327 = 0$, наклон 10,89°. Силы реакции при этом $N_A \approx 1{,}13\,mg$, $N_D \approx 2{,}27\,mg$.

Смысл: гладкая сфера «не держит» момент, поэтому центр тяжести системы устанавливается точно под её центром.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$, $\alpha \approx 10{,}9^\circ$ (тело массы $2m$ ниже).