Две перегородки из пенопласта

Задача 5. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 5] В цилиндрической теплоизолированной трубе, наполненной водой, сделаны две перегородки из одинакового пенопласта, перпендикулярные оси трубы, толщина которых отличается вдвое (см. рисунок). Известно, что если бы температура воды слева и справа от более тонкой перегородки отличалась на $\Delta t = 1°$, поток тепла через эту перегородку составил бы $q = 0{,}01$ Дж/с. Какой будет установившаяся температура воды в полости между перегородками, если справа от толстой перегородки поддерживать температуру $t_1 = 80°\text{C}$, а слева от тонкой — $t_2 = 10°\text{C}$? Какое количество теплоты в единицу времени нужно выделять в горячей воде и удалять из холодной воды, чтобы поддерживать такое равновесие?

Указание. Количество тепла q, переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx, одна поверхность которого поддерживается при температуре t_1, вторая — при температуре t_2, определяется законом: $q = \lambda\,(t_2 - t_1)\,/\Delta x$, где коэффициент λ определяется свойствами вещества (закон Фурье).



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на стационарную теплопроводность через слои, соединённые последовательно. Горячая вода справа греет полость через толстую перегородку, полость отдаёт тепло холодной воде через тонкую. Если бы поток внутрь полости был больше потока наружу, полость нагревалась бы, её температура росла, поток внутрь падал, а наружу рос — пока они не сравняются. Установившаяся температура — та, при которой потоки равны. Ключевые законы — закон Фурье для каждой перегородки и тепловой баланс полости.

Обозначения. S — площадь сечения трубы; d — толщина тонкой перегородки, $2d$ — толстой; t_x — искомая температура полости; P — по-

ток тепла (Дж/с) через перегородки; $K = \dfrac{\lambda S}{d}$ — теплопроводность тонкой перегородки, поток через неё на градус разности (рис. 1).

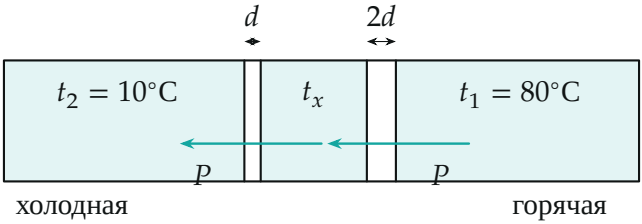


Рис. 1. Поток тепла P идёт справа налево через обе перегородки; в установившемся режиме он одинаков для обеих.

1. Закон Фурье для каждой перегородки. Умножая плотность потока из указания на площадь S, получаем поток через всю перегородку. Тепло течёт от горячего к холодному, поэтому берём модули разностей:

$$\text{толстая: } P_1 = \frac{\lambda S}{2d}(t_1 - t_x) = \frac{K}{2}(t_1 - t_x),$$

$$\text{тонкая: } P_2 = \frac{\lambda S}{d}(t_x - t_2) = K(t_x - t_2).$$

2. Тепловой баланс полости. Температура полости установилась — её внутренняя энергия не меняется, сколько тепла пришло, столько ушло; стенки трубы теплоизолированы:

$$P_1 = P_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1 - t_x}{2} = t_x - t_2;$$

$$t_x = \frac{t_1 + 2t_2}{3} = \frac{80 + 20}{3}\,°\text{C} \approx 33{,}3\,°\text{C}.$$

Полость ближе по температуре к холодной воде: тонкая перегородка лучше проводит тепло, и полость «связана» с холодной стороной сильнее. Распределение температуры вдоль трубы — на рис. 2.

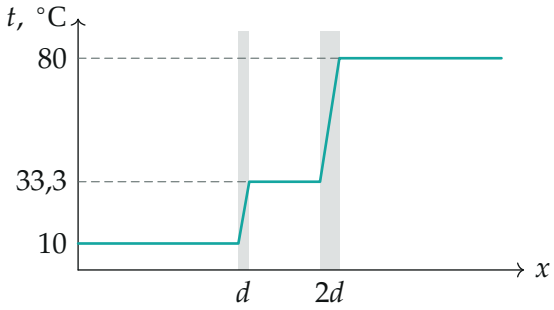


Рис. 2. Температура вдоль трубы (бирюза; толщины перегородок — как на рис. 1). В воде температура везде одна, весь перепад — на пенопласте: 23,3° на тонкой и 46,7° на толстой, вдвое больше.

3. Коэффициент K из данных условия. По условию при разности $\Delta t = 1°$ на тонкой перегородке поток через неё равен q. Тот же закон Фурье:

$$q = K\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad K = \frac{q}{\Delta t} = 0{,}01 \text{ Вт/град.}$$

Само λ и размеры S, d по отдельности не нужны: в ответ входит только комбинация $K = \lambda S/d$.

4. Мощность нагревателя и холодильника. Чтобы температуры t_1 и t_2 не менялись, в горячей воде нужно выделять в единицу времени ровно то тепло, что уходит через толстую перегородку, а из холодной — удалять то, что приходит через тонкую. Это один и тот же поток P:

$$P = K\,(t_x - t_2) = \frac{q}{\Delta t} \cdot \frac{t_1 - t_2}{3} = 0{,}01 \cdot \frac{70}{3} \text{ Вт} \approx 0{,}23 \text{ Вт.}$$

5. Второй способ — тепловые сопротивления. Перегородки стоят последовательно, как резисторы в цепи (рис. 3): тепловое сопротивление тонкой $\frac{1}{K}$, толстой $\frac{2}{K}$, всего $\frac{3}{K}$. Разность температур $t_1 - t_2 = 70°$ — аналог напряжения, поток — аналог тока:

$$P = \frac{t_1 - t_2}{3/K} = \frac{70 \cdot 0{,}01}{3} \text{ Вт} \approx 0{,}23 \text{ Вт,}$$

$$t_x = t_2 + \frac{P}{K} = 10 + 23{,}3 \approx 33{,}3°\text{C.}$$

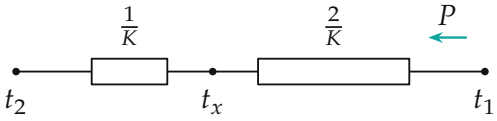


Рис. 3. Тепловая схема: две перегородки — два последовательных сопротивления; толстая — вдвое большее.

Обратите внимание. Температура полости — не среднее арифметическое 45°C: перегородки разные, и большая часть перепада приходится на толстую, хуже проводящую. И данные $\Delta t = 1°$, $q = 0{,}01$ Дж/с относятся к *тонкой* перегородке — у толстой поток на градус вдвое меньше.

Ответ.

$$t_x = \frac{t_1 + 2t_2}{3} \approx 33{,}3°\text{C}, \qquad P = \frac{q\,(t_1 - t_2)}{3\,\Delta t} \approx 0{,}23\ \text{Вт}$$

Столько выделять в горячей воде и столько же удалять из холодной.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж/с}}{\text{град}} \cdot \text{град} = \text{Вт}$. Потоки через перегородки: $\frac{0{,}01}{2}(80 - 33{,}3) = 0{,}233$ Вт и $0{,}01\,(33{,}3 - 10) = 0{,}233$ Вт — равны. Предел: при одинаковых перегородках $t_x = \frac{t_1+t_2}{2} = 45°$C, по симметрии.

Смысл: последовательные слои делят перепад температур пропорционально своим тепловым сопротивлениям, как резисторы делят напряжение.

Ответ. $t_x = \dfrac{t_1 + 2t_2}{3} \approx 33{,}3°$C; в горячей воде выделять и из холодной удалять $P = \dfrac{q(t_1 - t_2)}{3\Delta t} \approx 0{,}23$ Вт.