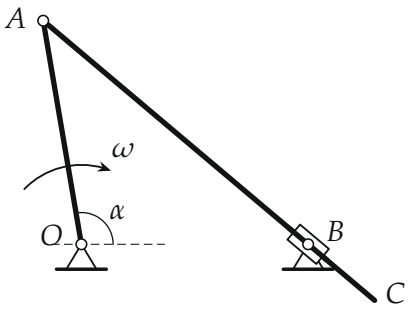
Кривошипно-кулисный механизм

Задача 6. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 11 класс, задача 6] Кривошипно-кулисный механизм представляет собой стержень OA длиной $l = 1$ м, который может вращаться вокруг точки O (этот стержень называется «кривошип»), и шарнирно связанный с ним стержень OC, который может свободно двигаться в маленькой поворотной втулке B (этот стержень называется «кулиса»). Известно, что расстояние $OA = OB$. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ с$^{-1}$. Найти величину и направление вектора мгновенного ускорения той точки кулисы, которая находится внутри втулки C, когда $\alpha = 120°$.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на кинематику твёрдого тела. Кулиса — твёрдый стержень: её точка A движется по окружности вместе с кривошипом, а сама кулиса всё время проходит через неподвижную втулку B, скользя в ней и поворачиваясь. В условии втулка одна — B, кулиса — стержень AC; спрашивают про ту точку кулисы, которая в данный момент находится во втулке B. Главная идея — найти угловую скорость кулисы (она окажется постоянной, $\omega/2$), а затем ускорение любой точки кулисы как сумму ускорения точки A и центростремительного ускорения вращения кулисы вокруг A.

Обозначения. $l = OA = OB$; $L = AB$ — расстояние от шарнира A до втулки; P — точка кулисы, находящаяся сейчас во втулке B; Ω — угловая скорость кулисы; $\vec{e}$ — единичный вектор вдоль кулисы от A к C; φ — угол кулисы с горизонталью.

1. Геометрия и угловая скорость кулисы. Треугольник OAB равнобедренный ($OA = OB = l$), угол при вершине O равен α. Углы при основании равны $\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, поэтому кулиса наклонена к горизонтали на угол

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \qquad L = AB = 2l \sin\frac{\alpha}{2}.$$

При $\alpha = 120^\circ$: $\varphi = 30^\circ$, $L = \sqrt{3}\,l$ (рис. 1). Угол φ меняется вдвое медленнее, чем α, значит, кулиса вращается с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{|\Delta\alpha|}{\Delta t} = \frac{\omega}{2} = \text{const}.$$

Обратите внимание: Ω постоянна при любом α (это свойство вписанного угла: B и A — на окружности радиуса l с центром O).

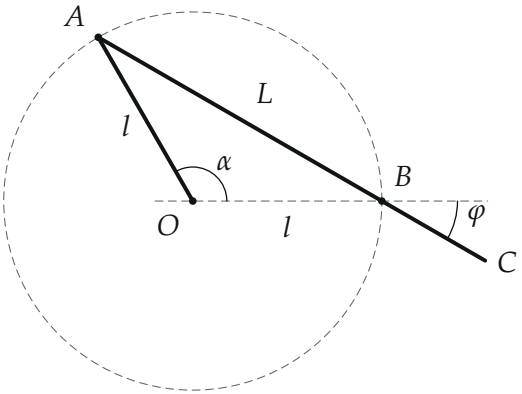


Рис. 1. Положение при $\alpha = 120^\circ$: треугольник OAB равнобедренный, кулиса наклонена к горизонтали на $\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, $L = AB = \sqrt{3}\,l$. Пунктир — окружность, по которой движется A.

2. Скорости. Точка A движется по окружности: $v_A = \omega l$, вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен OA. Угол между $\vec{v}_A$ и кулисой равен $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$ (рис. 2). Скорость точки P направлена вдоль кулисы — поперёк втулка её не пускает. Кулиса твёрдая, поэтому проекции скоростей её точек на саму ку-

лису одинаковы:

$$u = v_P = v_A \cos\frac{\alpha}{2} = \omega l \cos\frac{\alpha}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Поперечная составляющая $v_A \sin\frac{\alpha}{2}$ — это вращение кулисы вокруг P: $v_A \sin\frac{\alpha}{2} = \Omega L$, откуда $\Omega = \dfrac{\omega l \sin(\alpha/2)}{2l\sin(\alpha/2)} = \dfrac{\omega}{2}$ — второй вывод угловой скорости кулисы, совпал.

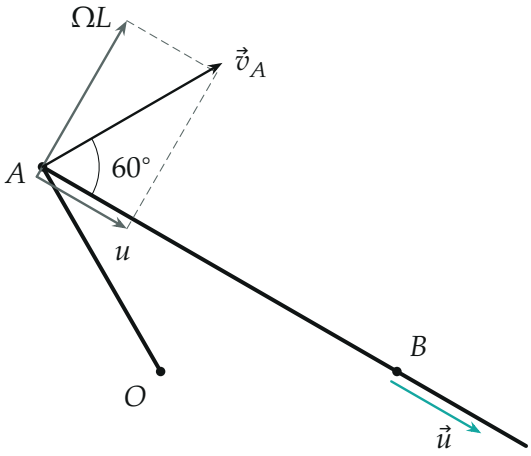


Рис. 2. Скорость точки A раскладывается на составляющую и вдоль кулисы и ΩL поперёк. Точка P во втулке имеет только продольную скорость и (бирюза; стрелка сдвинута с кулисы для видимости).

3. Ускорение точки P — сложение движений. Движение кулисы — это поступательное движение вместе с точкой A плюс вращение вокруг A с угловой скоростью Ω. Поэтому ускорение любой её точки, удалённой от A на L,

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{\text{вр}},$$

где $\vec{a}_A$ — ускорение точки A, а $\vec{a}_{\text{вр}}$ — ускорение вращения вокруг A. Обе составляющие простые:

- A движется по окружности равномерно, поэтому $\vec{a}_A$ — только центростремительное, к O: $a_A = \omega^2 l = 1$ м/с^2;

- $\Omega = \text{const}$, поэтому у вращения вокруг A нет касательной части, есть только центростремительная, от P к A: $a_{\text{вр}} = \Omega^2 L = \dfrac{\omega^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,l = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ м/с$^2 \approx 0{,}43$ м/с^2.

Направление $\vec{a}_A$ (от A к O) составляет с кулисой (от A к B) угол $\angle OAB = 30°$, вектор $\vec{a}_{\text{вр}}$ направлен вдоль кулисы назад, к A. Сложение — на рис. 3.

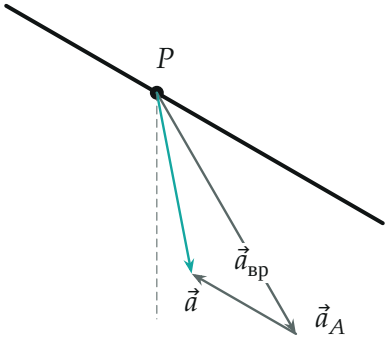


Рис. 3. Ускорение точки P: $\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{a}_{вр}$; $\vec{a}_A$ (к O, 1 м/с^2) и $\vec{a}_{вр}$ (к A, 0,43 м/с^2). Пунктир — вертикаль.

4. Проекции на кулису и на перпендикуляр. Ось τ — вдоль кулисы от A к C, ось n — перпендикулярно кулисе в сторону O (вниз от кулисы):

$$a_\tau = a_A \cos 30° - a_{\text{вр}} = \omega^2 l \cos\frac{180° - \alpha}{2} - \Omega^2 L = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = a_A \sin 30° = \frac{1}{2} \text{ м/с}^2.$$

В общем виде $a_\tau = \dfrac{\omega^2 l}{2} \sin\dfrac{\alpha}{2}$, $a_n = \omega^2 l \cos\dfrac{\alpha}{2}$. Модуль и угол β с кули-

сой:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \omega^2 l \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4}\ \text{м/с}^2 \approx 0{,}66\ \text{м/с}^2,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_n}{a_\tau} = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \beta \approx 49^\circ.$$

Продольная составляющая направлена к C, поперечная — от кулисы в сторону O; сам вектор почти вертикален: отклонён от вертикали вниз на $\operatorname{arctg}\dfrac{a_x}{|a_y|} = \operatorname{arctg}\dfrac{0{,}125}{0{,}65} \approx 11^\circ$ в сторону C (рис. 4).

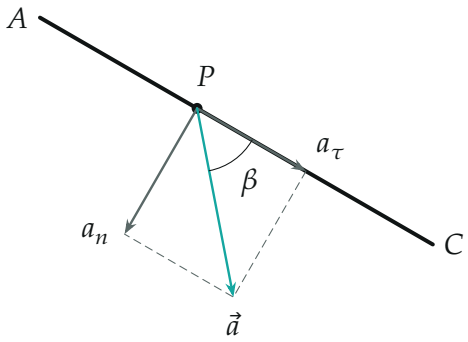


Рис. 4. Составляющие ускорения точки P: $a_\tau = \frac{\sqrt{3}}{4}$ вдоль кулисы к C и $a_n = \frac{1}{2}$ поперёк, в сторону O; $\beta \approx 49^\circ$.

5. Второй способ — точка на вращающейся прямой. Опишем точку кулисы координатой x вдоль кулисы, отсчитанной от втулки B. Её скорость складывается из скольжения $\dot{x}\,\vec{e}$ и поворота кулисы $x\Omega\,\vec{n}$. За малое время dt меняются и $\dot{x}$, и направления $\vec{e}$, $\vec{n}$ (поворот на $\Omega\,dt$), и сама x:

$$\vec{a} = (\ddot{x} - x\Omega^2)\,\vec{e} + (2\dot{x}\,\Omega + x\dot{\Omega})\,\vec{n}.$$

Для точки, которая сейчас во втулке, $x = 0$: $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e} + 2\dot{x}\,\Omega\,\vec{n}$. Здесь $\dot{x} = u = 0{,}5$ м/с, $\Omega = 0{,}5\ \text{с}^{-1}$, так что $a_n = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\ \text{м/с}^2$; $\ddot{x} = -\ddot{L} = \dfrac{\omega^2 l}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \text{м/с}^2$ (из $L = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$). Совпало. Двойка в $2\dot{x}\Omega$ — две

равные причины: вектор скорости $u\vec{e}$ поворачивается вместе с кулисой, и точка, уходя от втулки, попадает туда, где поперечная скорость $x\Omega$ больше.

У организаторов в ответе $a = \frac{\omega^2 l}{2} = 0{,}5$ м/с^2 под углом 30° к кулисе: при подсчёте поперечной составляющей учтён только поворот вектора скорости ($u\Omega$), а вторая половина ($u\Omega$ от смещения точки вдоль вращающейся кулисы) потеряна. Их продольная составляющая $\frac{\sqrt{3}}{4}$ верна.

Обратите внимание. «Точка кулисы во втулке» — материальная точка стержня, а не геометрическая точка B: у геометрической точки ускорение нулевое, а у той, что в ней сейчас находится, — нет.

Ответ.

$$a = \omega^2 l\sqrt{\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}\ \text{м/с}^2 \approx 0{,}66\ \text{м/с}^2$$

Угол с кулисой $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 49°$: вдоль кулисы к C — $\frac{\sqrt{3}}{4}$ м/с^2, поперёк в сторону O — 0,5 м/с^2 (почти вертикально вниз, на 11° от вертикали в сторону C).

Проверка. Размерность: $\omega^2 l$ — м/с^2. Численно (python): положение материальной точки кулисы, которая при $\alpha = 120°$ во втулке, посчитано при $t = \pm 10^{-4}$ с; вторая разность даёт $\vec{a} = (0{,}125;\ -0{,}650)$ м/с^2, $|\vec{a}| = 0{,}6614 = \sqrt{7}/4$, угол с кулисой 49,1°. Ответ не зависит от направления вращения кривошипа: при смене знака ω меняют знак и $\dot{x}$, и Ω, а $\ddot{x} \propto \omega^2$. Предел $\alpha \to 180°$ (A напротив B, кулиса вертикальна, проходит через O): $a_n \to 0$, $a \to \frac{\omega^2 l}{2}$ — кулиса в этот момент скользит со скоростью $u = 0$, и остаётся только продольное ускорение.

Смысл: кулиса вращается равномерно вдвое медленнее кривошипа, а ускорение её точки складывается из ускорения шарнира A и центростремительного ускорения вращения кулисы вокруг A.

Ответ. $a = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$ м/с^2; угол с кулисой $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 49°$ (вдоль кулисы к C — $\frac{\sqrt{3}}{4}$, поперёк к O — $\frac{1}{2}$ м/с^2).