Расширение воды при нагреве от 10 до 100 °C

Задача 4. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Коэффициент объёмного теплового расширения воды достаточно сильно зависит от температуры (см. таблицу). Пользуясь данными таблицы, оцените, во сколько раз возрастёт объём воды при её нагревании от 10 °C до температуры кипения 100 °C.

Температура	Коэффициент теплового расширения
$10-20\,^\circ C$	$1{,}5\cdot 10^{-4}$ (1/град)
$20-40\,^\circ C$	$3\cdot 10^{-4}$ (1/град)
$40-60\,^\circ C$	$4{,}5\cdot 10^{-4}$ (1/град)
$60-100\,^\circ C$	$6\cdot 10^{-4}$ (1/град)

Указание. Коэффициент объёмного теплового расширения β позволяет находить, как изменяется объём тел при нагревании. Если при некоторой температуре объём тела был равен V, то при увеличении температуры на ΔT объём тела вырастет на величину $\Delta V = V\beta\Delta T$.

▲ **Решение. Что происходит.** Коэффициент β меняется с температурой, поэтому одной формулой $\Delta V = V\beta\Delta T$ на весь нагрев от 10 до 100 °C пользоваться нельзя. Главная идея — разбить нагрев на интервалы таблицы, внутри которых β постоянен, и на каждом применить формулу из указания к объёму в начале интервала. Объём при этом умножается на множитель $(1+\beta\Delta T)$ на каждом интервале.

Обозначения. V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 — объёмы воды при 10, 20, 40, 60, 100 °C; $\beta_1, \dots, \beta_4$ — коэффициенты из таблицы по порядку; $\Delta T_1 = 10\,^\circ$C, $\Delta T_2 = \Delta T_3 = 20\,^\circ$C, $\Delta T_4 = 40\,^\circ$C — длины интервалов. Как β зависит от температуры — на рис. 1.

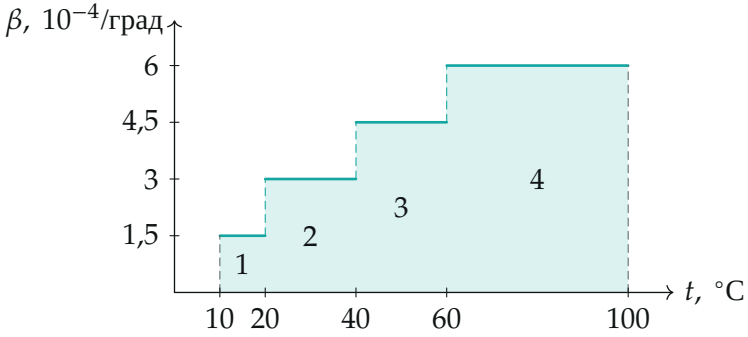

Рис. 1. Ступенчатый график $\beta(t)$ по таблице; цифры — номера интервалов. Площадь каждой полоски равна $\beta_i \Delta T_i$.

1. Один интервал. На первом интервале β_1 постоянен, и по формуле из указания

$$V_2 = V_1 + V_1\beta_1\Delta T_1 = V_1\,(1 + \beta_1\Delta T_1)\,.$$

Здесь $V_1\beta_1\Delta T_1$ — прибавка объёма за интервал (рис. 2: та же вода в сосуде с площадью дна S поднимается на малую высоту).

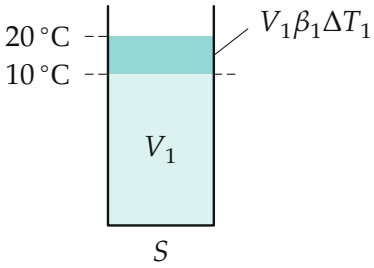

Рис. 2. При нагреве от 10 до 20 °C объём V_1 получает прибавку $\Delta V = V_1\beta_1\Delta T_1$ (бирюзовый слой; толщина сильно преувеличена).

Так же на следующих интервалах, каждый раз от объёма в начале интервала:

$$V_3 = V_2\,(1 + \beta_2\Delta T_2)\,, \quad V_4 = V_3\,(1 + \beta_3\Delta T_3)\,, \quad V_5 = V_4\,(1 + \beta_4\Delta T_4)\,.$$

2. Весь нагрев. Подставим формулы друг в друга:

$$\frac{V_5}{V_1} = (1+\beta_1\Delta T_1)\,(1+\beta_2\Delta T_2)\,(1+\beta_3\Delta T_3)\,(1+\beta_4\Delta T_4)\,.$$

Числа $\beta_i\Delta T_i$ малы:

$$\beta_1\Delta T_1 = 0{,}0015, \quad \beta_2\Delta T_2 = 0{,}006, \quad \beta_3\Delta T_3 = 0{,}009, \quad \beta_4\Delta T_4 = 0{,}024.$$

3. Приближение. При раскрытии скобок произведения двух малых чисел (порядка 10^{-4} и меньше) много меньше самих чисел (порядка 10^{-2}), их отбрасываем. Почему так можно — на рис. 3 для двух множителей: площадь прямоугольника $(1+a)(1+b)$ складывается из единичного квадрата, двух полосок a и b и крошечного уголка ab.

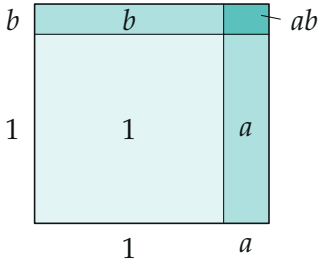

Рис. 3. $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab$. *При* $a, b \sim 10^{-2}$ *уголок* $ab \sim 10^{-4}$ — *в сто раз меньше полосок (на рисунке* a *и* b *сильно преувеличены).*

Получаем

$$\frac{V_5}{V_1} \approx 1+\beta_1\Delta T_1+\beta_2\Delta T_2+\beta_3\Delta T_3+\beta_4\Delta T_4 = \\ = 1+0{,}0015+0{,}006+0{,}009+0{,}024 = 1{,}0405.$$

Сумма $\sum \beta_i\Delta T_i$ — это площадь под ступенчатым графиком на рис. 1. Перемножение без приближения даёт 1,0410 — разница в четвёртом знаке, ниже точности оценки. Как растёт объём по ходу нагрева — на рис. 4: на каждом интервале почти прямая, и чем горячее вода, тем круче.

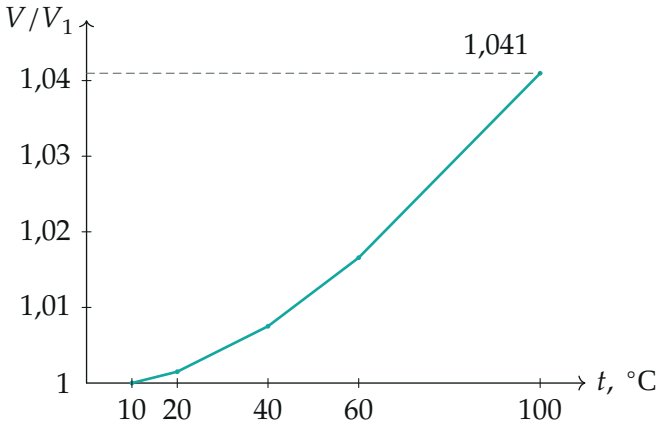

Рис. 4. Отношение V/V_1 по ходу нагрева (точки посчитаны перемножением множителей). Масштаб по вертикали сильно растянут: весь рост — около 4%.

Обратите внимание. Указание даёт $\Delta V = V\beta\Delta T$ для малого нагрева; на интервале в 40 °C объём меняется на 2,4%, и брать V в начале или в конце интервала — разница порядка $(\beta\Delta T)^2 \sim 10^{-3}$ от результата. Поэтому ответ имеет смысл как оценка «$\approx 1{,}04$», а не с четырьмя знаками. И нельзя взять один средний коэффициент на весь нагрев «на глаз»: среднее четырёх чисел таблицы $3{,}75 \cdot 10^{-4}$, умноженное на 90 °C, даёт 1,034 — интервалы разной длины надо учитывать с весом ΔT_i.

Ответ. $\boxed{\dfrac{V_5}{V_1} \approx 1 + \sum \beta_i \Delta T_i \approx 1{,}04}$ (объём вырастет примерно на 4%).

Проверка. Размерность: $\beta\Delta T$ — (1/град)·град, безразмерно. Второй способ: средний по температуре коэффициент — площадь под графиком рис. 1, делённая на 90 °C, $\bar\beta = 0{,}0405/90 = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/град, и $1 + \bar\beta \cdot 90 = 1{,}0405$. Предел: если бы β был одинаков на всех интервалах, сумма свелась бы к $1 + \beta \cdot 90$ °C — формуле из указания для всего нагрева.

Смысл: при малых относительных изменениях множители можно складывать, а не перемножать — вклады интервалов просто суммируются.

Ответ. Примерно в 1,04 раза: $V_{100}/V_{10} \approx 1 + \sum \beta_i \Delta T_i = 1{,}0405$ (без приближения 1,041).