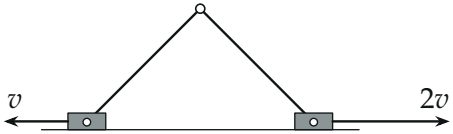
Два ползуна и шарнир между стержнями

Задача 6. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 9 класс, задача 6] Два ползуна шарнирно соединены с одинаковыми стержнями длиной l, которые в свою очередь шарнирно соединены между собой (см. рисунок). Ползуны движутся по горизонтальной поверхности в противоположные стороны со скоростями v и $2v$. Найти скорость шарнира, связывающего ползуны, в тот момент, когда углы между стержнями и поверхностью равны $45°$. Ползуном называют точечную деталь, которая может перемещаться по некоторой поверхности или направляющей.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на кинематику связей: стержень не растягивается и не сжимается, поэтому проекции скоростей двух его концов на сам стержень равны. Каждый стержень даёт одно уравнение на скорость верхнего шарнира, двух стержней хватает на две её проекции. Второй способ — перейти в систему отсчёта, где ползуны движутся симметрично.

Обозначения. K — левый ползун (скорость v влево), M — правый (скорость $2v$ вправо), S — верхний шарнир, $\vec{u}$ — его искомая скорость; ось x — вправо по поверхности, ось y — вверх (рис. 1).

1. Почему проекции на стержень равны. Если бы проекции скоростей концов стержня на его направление различались, за малое время dt расстояние между концами изменилось бы на $(u_{\parallel} - v_{\parallel})\,dt \neq 0$, а длина стержня l постоянна. Поэтому для каждого стержня

$$\vec{v}_{\text{конца 1}} \cdot \vec{e} = \vec{v}_{\text{конца 2}} \cdot \vec{e},$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор вдоль стержня.

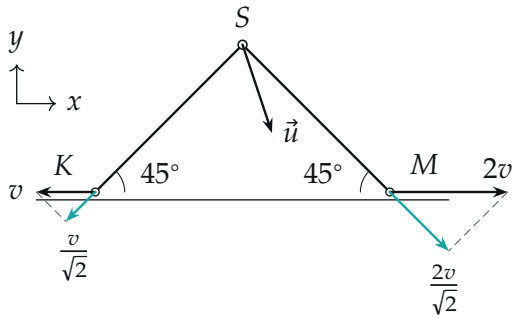


Рис. 1. Скорости ползунов (чёрные) и их проекции на стержни (бирюза). Вектор $\vec{u}$ шарнира S — найденный ниже.

2. Стержень KS**.** Единичный вектор от K к S: $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Скорость ползуна K: $(-v;\, 0)$. Условие нерастяжимости:

$$\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}} = \frac{-v}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad u_x + u_y = -v.$$

3. Стержень SM**.** Единичный вектор от S к M: $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Скорость ползуна M: $(2v;\, 0)$:

$$\frac{u_x - u_y}{\sqrt{2}} = \frac{2v}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad u_x - u_y = 2v.$$

4. Проекции и модуль. Складываем и вычитаем уравнения:

$$u_x = \frac{v}{2}, \qquad u_y = -\frac{3v}{2}.$$

Шарнир движется вправо и вниз (знак минус у u_y). Модуль по теореме Пифагора и угол α с вертикалью:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{9v^2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}\, v \approx 1{,}58\, v,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|u_x|}{|u_y|} = \frac{1}{3}, \qquad \alpha \approx 18{,}4^\circ.$$

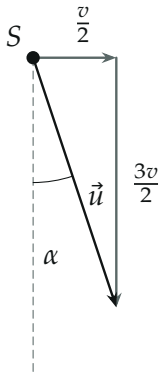


Рис. 2. Скорость шарнира и её проекции: $\frac{v}{2}$ вправо и $\frac{3v}{2}$ вниз; α — угол с вертикалью.

5. Второй способ — подвижная система отсчёта. Перейдём в систему, движущуюся вправо со скоростью $\frac{v}{2}$. По закону сложения скоростей в ней левый ползун едет влево со скоростью $v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2}$, правый — вправо со скоростью $2v - \frac{v}{2} = \frac{3v}{2}$ (рис. 3). Картина симметрична относительно вертикали через S, поэтому шарнир движется вертикально. Проекция на левый стержень: $\frac{3v}{2}\cos 45^\circ = u'\cos 45^\circ$, откуда $u' = \frac{3v}{2}$ вниз. Возвращаемся в систему Земли: $\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{V}$, где $\vec{V}$ — скорость подвижной системы, $\frac{v}{2}$ вправо. Получаем те же проекции $\left(\frac{v}{2}; -\frac{3v}{2}\right)$.

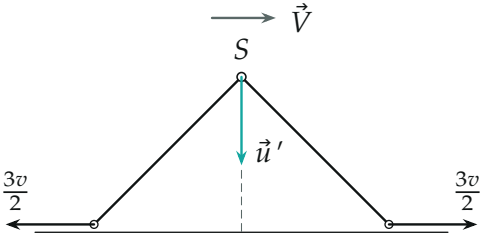


Рис. 3. В системе, движущейся вправо со скоростью $\frac{v}{2}$, ползуны разъезжаются симметрично, и шарнир S опускается вертикально.

Обратите внимание. Проекции скоростей равны именно на *стержень*, а не на горизонталь: шарнир S и ползуны движутся в разных направлениях. И скорость $\vec{u}$ не обязана быть перпендикулярна чему-либо: перпендикулярной к стержню бывает лишь скорость его точки относительно другого конца.

Ответ. $\boxed{u = \dfrac{\sqrt{10}}{2}v \approx 1{,}6\,v}$, направлена вправо-вниз (в сторону более быстрого ползуна) под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} \approx 18^\circ$ к вертикали.

Проверка. Размерность: скорость. Предел: при одинаковых скоростях ползунов (v и v) те же уравнения дают $u_x = 0$, $u_y = -v$ — шарнир опускается вертикально, как и должно быть по симметрии. Подстановка: проекции $\vec{u} = (\frac{v}{2}; -\frac{3v}{2})$ на стержни: $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2})\frac{v}{\sqrt{2}} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ и $(\frac{1}{2} + \frac{3}{2})\frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{2v}{\sqrt{2}}$ — совпадают с проекциями скоростей ползунов.

Смысл: горизонтальная скорость шарнира — среднее скоростей ползунов, вертикальная — полусумма их модулей (так при 45°).

Ответ. $u = \dfrac{\sqrt{10}}{2}v \approx 1{,}6\,v$; направлена вниз и в сторону ползуна со скоростью $2v$ под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} \approx 18^\circ$ к вертикали.