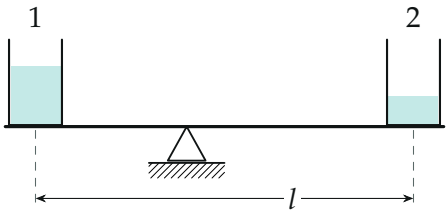
Стаканы на неравноплечем рычаге

Задача 1. [ИОШ 2024/25, 10 класс, задача 1] Два стакана, содержащих разное количество воды, уравновешены на неравноплечем рычаге. Расстояние между центрами стаканов равно l. Если из одного стакана в другой перелить воду массой Δm, для восстановления равновесия рычага его опору нужно передвинуть на расстояние Δl. Найти массу воды в обоих стаканах. Массой стаканов и рычага пренебречь.



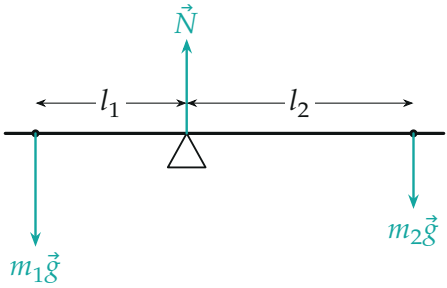
Поясняющий рисунок: стаканы с водой на невесомом рычаге, опора ближе к более тяжёлому стакану.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на правило моментов. Рычаг находится в равновесии, когда моменты сил тяжести стаканов относительно опоры равны. После переливания один стакан стал тяжелее, и опору надо сдвинуть к нему: меняются сразу и силы, и плечи. Два уравнения равновесия — до и после — содержат неизвестные массы и плечи, но нам нужна только сумма масс, и она находится, если вычесть одно уравнение из другого.

Обозначения. m_1, m_2 — массы воды в стаканах до переливания; l_1, l_2 — плечи стаканов относительно опоры до переливания, $l_1 + l_2 = l$. Переливаем воду массой Δm из стакана 1 в стакан 2.

1. Равновесие до переливания. Правило моментов для рычага относительно опоры (момент силы реакции опоры относительно неё равен нулю — поэтому ось выбираем там):

$$m_1 g\, l_1 = m_2 g\, l_2.$$

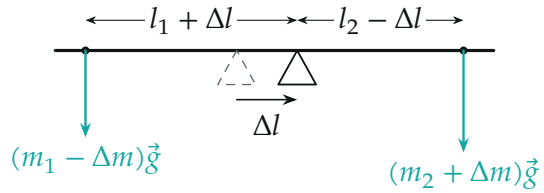


До переливания: силы, действующие на рычаг, и плечи сил тяжести стаканов относительно опоры.

2. Куда двигать опору. После переливания масса воды во втором стакане $m_2 + \Delta m$, в первом $m_1 - \Delta m$. Момент силы тяжести второго стакана вырос, первого — уменьшился, и рычаг повернулся бы в сторону стакана 2. Чтобы снова уравнять моменты, надо уменьшить плечо стакана 2 и увеличить плечо стакана 1, то есть сдвинуть опору на Δl к стакану 2. Новые плечи: $l_1 + \Delta l$ и $l_2 - \Delta l$.

3. Равновесие после переливания. Снова правило моментов относительно новой опоры:

$$(m_1 - \Delta m)(l_1 + \Delta l) = (m_2 + \Delta m)(l_2 - \Delta l).$$



После переливания опора сдвинута на Δl к стакану 2 (прежнее положение — пунктиром).

4. Исключаем плечи. Раскроем скобки:

$$m_1 l_1 + m_1 \Delta l - \Delta m\, l_1 - \Delta m\, \Delta l = m_2 l_2 - m_2 \Delta l + \Delta m\, l_2 - \Delta m\, \Delta l.$$

Слагаемые $m_1 l_1$ и $m_2 l_2$ равны по пункту 1, а $\Delta m\,\Delta l$ стоит в обеих частях — они сокращаются:

$$(m_1 + m_2)\,\Delta l = \Delta m\,(l_1 + l_2) = \Delta m\,l,$$

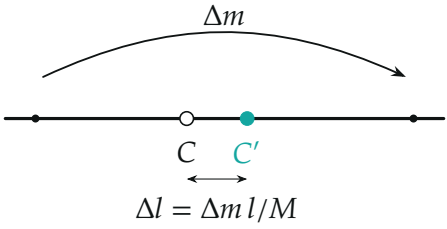
$$m_1 + m_2 = \frac{l\,\Delta m}{\Delta l}.$$

Обратите внимание: по отдельности массы m_1 и m_2 найти нельзя — для этого нужно знать, где стояла опора (отношение l_1/l_2), а в условии его нет. Однозначно определяется только суммарная масса воды, её и спрашивают.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{м}} = $ кг. Второй способ — через центр масс. Опора рычага в равновесии стоит точно под центром масс воды. Перелив массу Δm на расстояние l, мы сдвинули центр масс системы общей массы $M = m_1 + m_2$ на

$$\Delta l = \frac{\Delta m\,l}{M},$$

и опору надо сдвинуть на столько же, — отсюда тот же ответ $M = l\,\Delta m/\Delta l$. Предел: чем больше воды в стаканах, тем меньше сдвигается опора при переливании той же порции — формула это даёт.



Второй способ: опора стоит под центром масс воды C; перенос порции Δm на расстояние l сдвигает центр масс в C' на Δl.

Физический смысл такой: переливание сдвигает центр масс воды, и сдвиг тем меньше, чем больше вся вода; по сдвигу опоры мы «взвешиваем» всю воду сразу.

Ответ. Суммарная масса воды $m_1 + m_2 = \dfrac{l\,\Delta m}{\Delta l}$ (по отдельности массы не определяются).