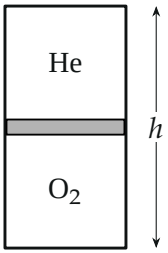
Гелий протекает мимо поршня

Задача 2. [ИОШ 2024/25, 10 класс, задача 2] Закрытый вертикальный цилиндрический сосуд высотой h разделен на два отсека массивным поршнем. В нижнем отсеке находится кислород, а в верхнем — гелий при одинаковых температурах. В начальный момент объемы нижнего и верхнего отсеков сосуда одинаковы, а поршень находится в равновесии. Известно, что количество вещества гелия втрое меньше количества вещества кислорода. В некоторый момент времени зазоры между поршнем и стенками сосуда начинают пропускать гелий, но не пропускают кислород. На какой высоте от дна сосуда окажется поршень через достаточно большое время? Температура газов не менялась в течение всего процесса.



Поясняющий рисунок: начальное состояние, объёмы отсеков равны.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Поршень массивный, поэтому в равновесии давление снизу больше давления сверху на mg/S. Сначала эту разность создают кислород снизу и гелий сверху. Когда гелий начинает просачиваться, он со временем равномерно заполняет весь сосуд — и над поршнем, и под ним. Главная идея: давление идеального газа определяется концентрацией и температурой, $p = nk_Б T$ ($k_Б$ — постоянная Больцмана). Концентрация и температура гелия по обе стороны поршня одинаковы, значит, одинаково и его давление, и на поршень гелий в итоге не действует. Остаётся кислород, который один держит поршень. Это задача на смесь газов: закон Дальтона (давления компонент складываются) плюс уравнение Менделеева — Клапейрона для каждой компоненты.

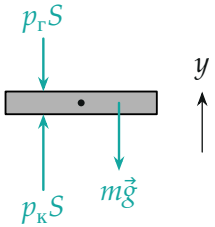
Обозначения. ν — количество вещества гелия, 3ν — кислорода; V — объём сосуда, S — площадь поршня, m — масса поршня, T — температура. Конечный объём кислорода запишем как kV с неизвестным множителем k — тогда искомая высота поршня kh (толщиной поршня пренебрегаем).

1. Начальное равновесие поршня. Каждый газ занимает объём $V/2$. Давления по уравнению Менделеева — Клапейрона:

$$p_к = \frac{3\nu RT}{V/2} = \frac{6\nu RT}{V}, \qquad p_г = \frac{\nu RT}{V/2} = \frac{2\nu RT}{V}.$$

Поршень покоится, поэтому по первому закону Ньютона в проекции на вертикаль $p_к S - p_г S - mg = 0$:

$$\frac{mg}{S} = p_к - p_г = \frac{4\nu RT}{V}. \qquad (1)$$



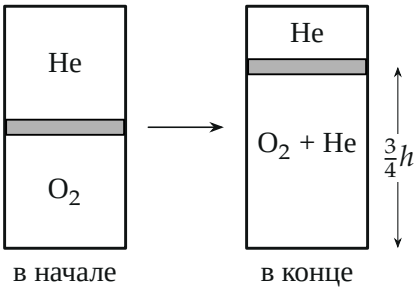
Силы, действующие на поршень в начальном состоянии: давление кислорода снизу, давление гелия сверху, тяжесть.

2. Конечное состояние. Через большое время гелий распределится по всему сосуду равномерно: пока концентрации по разные стороны поршня различны, он перетекает туда, где меньше. При одинаковых концентрации $n_г$ и температуре давление гелия $p'_г = n_г k_Б T$ над поршнем и под ним одно и то же. Под поршнем по закону Дальтона давление смеси $p'_к + p'_г$, над поршнем — $p'_г$. Первый закон Ньютона для поршня:

$$(p'_к + p'_г)S - p'_г S - mg = 0 \;\Rightarrow\; \frac{mg}{S} = p'_к.$$

Гелий из условия равновесия выпал — его количество и положение поршня на него не влияют. Кислород занимает объём kV:

$$\frac{mg}{S} = \frac{3\nu RT}{kV}. \qquad (2)$$



Начальное и конечное состояния: гелий заполнил весь сосуд, поршень поднялся до высоты $\frac{3}{4}h$.

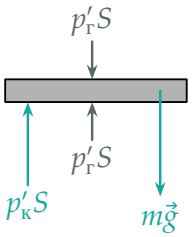
3. Высота поршня. Разделим (2) на (1) — сокращаются m, S, ν, R, T:

$$1 = \frac{3\nu RT/(kV)}{4\nu RT/V} = \frac{3}{4k} \;\Rightarrow\; k = \frac{3}{4}.$$

Объём кислорода $\frac{3}{4}V$, а при постоянном сечении высота пропорциональна объёму, поэтому поршень окажется на высоте

$$H = kh = \frac{3}{4}h.$$

Поршень поднялся (было $h/2$): давление кислорода теперь одно держит поршень и должно упасть с $6\nu RT/V$ до $4\nu RT/V$ — кислород расширяется.



Силы на поршень в конце: давления гелия сверху и снизу равны и взаимно уравновешиваются (серые), тяжесть держит один кислород.

Обратите внимание: поршень массивный, поэтому начальные давления газов *разные*, и гелий нельзя считать «ничего не меняющим». Но в конечном состоянии вклад гелия в силы на поршень исчезает полностью — в ответ не входит даже то, сколько гелия оказалось под поршнем.

Проверка. Размерность: ответ — доля от h. Второй способ — через изотерму кислорода: кислорода 3ν при той же T, поэтому $p_к \cdot \frac{V}{2} = p'_к \cdot kV$, и $k = \dfrac{p_к}{2p'_к} = \dfrac{6\nu RT/V}{2 \cdot 4\nu RT/V} = \dfrac{3}{4}$ — то же. Предел: если бы гелия не было вовсе ($\nu_г \to 0$, поршень изначально держал бы один кислород), просачиваться было бы нечему, и поршень остался бы на месте; в нашей формуле этому соответствует $p_к = mg/S$, то есть $k = \frac{1}{2}$.

Физический смысл такой: проницаемый для газа поршень этот газ «не чувствует»; кислород, освободившись от давления гелия сверху, расширяется ровно до того давления, которое создаёт сам поршень.

Ответ. $H = \dfrac{3}{4}h$ от дна сосуда.