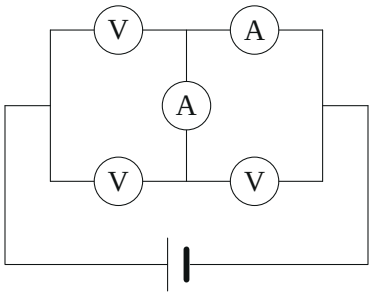
Мост из вольтметров и амперметров

Задача 3. [ИОШ 2024/25, 10 класс, задача 3] Из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров собрали электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Известно, что показания амперметров отличаются в 3 раза. Найти показания всех трёх вольтметров. Напряжение источника равно $U_0 = 2{,}6$ В. Сопротивление вольтметра больше сопротивления амперметра, сопротивление источника равно нулю.



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр и амперметр с конечными сопротивлениями — это обычные резисторы, которые заодно показывают ток через себя или напряжение на себе. Вольтметров три одинаковых (сопротивление R), амперметров два одинаковых (сопротивление $r < R$), так что в цепи всего одна неизвестная безразмерная величина — отношение R/r. Её и даёт условие «показания амперметров отличаются в 3 раза». Это задача на мостик: расставить токи по первому правилу Кирхгофа, а затем записать равенство напряжений для двух замкнутых контуров (второе правило Кирхгофа без ЭДС внутри контура). Главная тонкость — понять, какой из амперметров показывает больший ток.

Обозначения. R — сопротивление вольтметра, r — амперметра, $y = R/r > 1$. Вольтметры и амперметры пронумеруем, как на рисунке ниже: V_1 и A_2 — верхняя ветвь, V_2 и V_3 — нижняя, A_1 — перемычка. Узлы: L (левый, потенциал U_0), T и B (верхний и нижний концы перемычки), правый узел — потенциал 0.

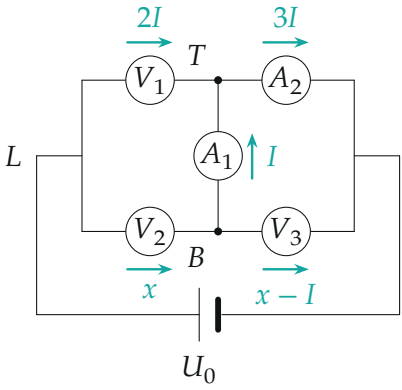
1. Куда течёт ток через перемычку. Пусть ток через A_1 течёт вниз, от T к B, и равен $i > 0$. Тогда $\varphi_T > \varphi_B$, т.е. $U_0 - \varphi_T < U_0 - \varphi_B$: напряжение

на V_1 меньше, чем на V_2, и токи через одинаковые вольтметры $I_{V1} < I_{V2}$. По первому правилу Кирхгофа для узлов T и B ток через A_2 равен $I_{V1} - i$, через V_3 — $I_{V2} + i$. Сравним напряжения на A_2 и V_3 (оба — от своего узла до правого, где потенциал 0):

$$\varphi_T = (I_{V1} - i)\, r < I_{V1}\, r < I_{V1}\, R < I_{V2}\, R < (I_{V2} + i)\, R = \varphi_B.$$

Получили $\varphi_T < \varphi_B$ — противоречие. Значит, ток через перемычку течёт вверх, от B к T. Здесь и нужно условие $r < R$.

Ток через A_2 — это сумма тока V_1 и тока перемычки, поэтому он больше тока A_1. Значит, A_1 показывает I, а A_2 — $3I$. Тогда через V_1 идёт $3I - I = 2I$. Ток через V_2 обозначим x; через V_3 идёт $x - I$ (часть тока узла B ушла в перемычку).



Токи во всех приборах через два неизвестных: ток I перемычки и ток x вольтметра V_2.

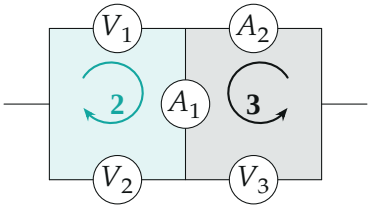
2. Контур V_1 — A_1 — V_2. Из узла L в узел T можно пройти через V_1 или через V_2 и A_1; разность потенциалов $\varphi_L - \varphi_T$ одна и та же (второе правило Кирхгофа для контура без источника). По закону Ома для каждого прибора:

$$2I \cdot R = x \cdot R + I \cdot r.$$

3. Контур A_1 — A_2 — V_3. Так же из узла B в правый узел: через V_3

или через A_1 и A_2:

$$(x - I)\,R = I\,r + 3I\,r = 4I\,r.$$



Два контура без источника: падения напряжения по двум путям между одними и теми же узлами равны.

4. Решаем систему. Разделим оба уравнения на r и введём $y = R/r$:

$$\begin{cases} 2yI = xy + I, \\ y\,(x - I) = 4I. \end{cases}$$

Из второго $xy = yI + 4I$; подставим в первое: $2yI = yI + 4I + I$, откуда

$$y = \frac{R}{r} = 5, \qquad x = I + \frac{4I}{y} = \frac{9}{5}\,I.$$

Отношение $y = 5 > 1$ согласуется с условием $R > r$.

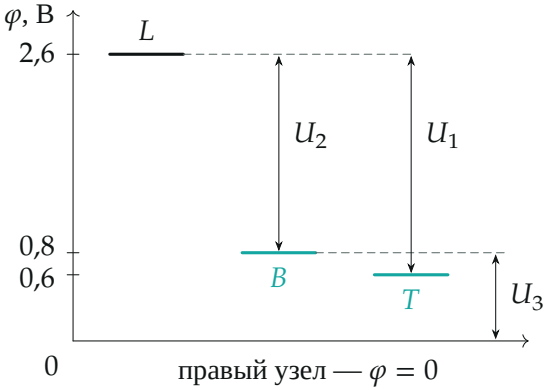
5. Показания вольтметров. Вольтметр показывает $U = I_V R$. Нижняя ветвь V_2 — V_3 подключена прямо к источнику, поэтому

$$U_2 + U_3 = U_0, \qquad U_2 : U_3 = x : (x - I) = \frac{9}{5} : \frac{4}{5} = 9 : 4,$$

$$U_2 = \frac{9}{13}\,U_0 = 1{,}8\ \text{В}, \qquad U_3 = \frac{4}{13}\,U_0 = 0{,}8\ \text{В}.$$

Из $U_2 = \frac{9}{5}\,IR$ находим $IR = \frac{5}{13}U_0$, и

$$U_1 = 2IR = \frac{10}{13}\,U_0 = 2{,}0\ \text{В}.$$



Потенциалы узлов: $\varphi_B = 0{,}8$ В выше $\varphi_T = 0{,}6$ В — поэтому ток перемычки идёт вверх.

Обратите внимание. Ответ не зависит от того, каковы сами R и r: важно лишь, что их отношение определяется условием о трёхкратной разнице токов. Без неравенства $R > r$ нельзя было бы решить, какой амперметр показывает $3I$.

Проверка. Потенциалы узлов: $\varphi_T = U_0 - U_1 = 0{,}6$ В, $\varphi_B = U_0 - U_2 = 0{,}8$ В. Ток перемычки $(\varphi_B - \varphi_T)/r = 0{,}2/r$, ток A_2 равен $\varphi_T/r = 0{,}6/r$ — ровно втрое больше. Токи вольтметров V_1, V_2, V_3 при $R = 5r$: $0{,}4/r$, $0{,}36/r$, $0{,}16/r$; в узле T: $0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$, в узле B: $0{,}36 = 0{,}2 + 0{,}16$ — первое правило Кирхгофа выполнено. Размерность: все показания — доли U_0.

Смысл: перемычка с малым сопротивлением «перекачивает» ток из нижней ветви в верхнюю, и вольтметр V_1 получает больше напряжения, чем V_2.

Ответ. $U_1 = \frac{10}{13}U_0 = 2$ В, $U_2 = \frac{9}{13}U_0 = 1{,}8$ В, $U_3 = \frac{4}{13}U_0 = 0{,}8$ В (V_1 — в одной ветви с амперметром, V_2 и V_3 — в другой; при этом $R/r = 5$).