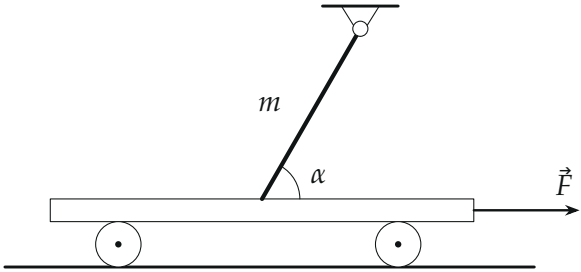
Стержень на тележке: заклинивание

Задача 5. [ИОШ 2024/25, 10 класс, задача 5] Стержень массой $m = 10$ кг прикреплён одним концом шарнирно к горизонтальному потолку. Вторым концом стержень опирается на тележку. Угол между стержнем и тележкой $\alpha = 60°$ (см. рисунок). Коэффициент трения между стержнем и тележкой равен $\mu = 0{,}2$. Сдвинется ли тележка вправо, если её тянуть с силой $\vec{F}$, равной одной четверти веса стержня? При каком коэффициенте трения между стержнем и тележкой тележка не сдвинется вправо ни при каких значениях силы $\vec{F}$? Трением между колёсами тележки и полом пренебречь.



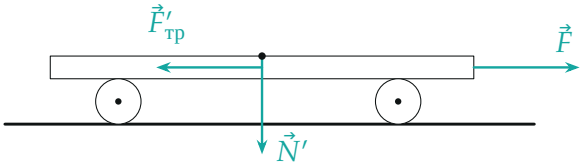
▲ **Решение.** **Что происходит.** Тележку тянут вправо; гладкие колёса не держат её, держит только сила трения со стороны стержня, направленная влево. По третьему закону Ньютона на нижний конец стержня трение действует вправо — и это трение поворачивает стержень вокруг шарнира так, что он сильнее упирается в тележку («встаёт в распор»). Чем сильнее тянем, тем сильнее прижим N и тем больше предельное трение μN. Вопрос сводится к сравнению: что растёт быстрее с ростом F — сама сила F или предел трения $\mu N(F)$. Это задача на равновесие твёрдого тела с трением покоя: правило моментов для стержня и сравнение силы трения покоя с её максимумом.

Обозначения. l — длина стержня; O — шарнир, A — нижний конец; N — сила нормальной реакции тележки на стержень; $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя тележки на стержень; $\vec{R}$ — сила реакции шарнира.

1. Тележка. Пока тележка покоится, по второму закону Ньютона в проекции на горизонталь сумма сил на неё равна нулю. Горизонтально

на тележку действуют только $\vec{F}$ и сила трения со стороны стержня (пол гладкий), поэтому эта сила трения направлена влево и по модулю равна F. По третьему закону Ньютона на стержень трение действует вправо:

$$F_{\text{тр}} = F.$$



Горизонтальные силы на тележку: тянут $\vec{F}$, держит только трение со стороны стержня $\vec{F}'_{тр}$; стержень давит вниз с силой $\vec{N}'$ (силы тяжести тележки и реакции пола не показаны — они вертикальны).

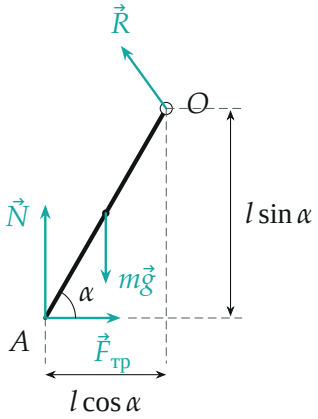
2. Правило моментов для стержня. Стержень покоится, поэтому сумма моментов сил относительно шарнира O равна нулю. Ось вращения выбираем в шарнире, чтобы неизвестная сила $\vec{R}$ не вошла в уравнение. Плечи (рисунок): у вертикальных сил N и mg — горизонтальные расстояния $l\cos\alpha$ и $\frac{l}{2}\cos\alpha$, у горизонтальной силы трения — вертикальное расстояние $l\sin\alpha$. Сила N поворачивает стержень против часовой стрелки (поднимает конец A), mg и $F_{\text{тр}}$ — по часовой:

$$N\,l\cos\alpha = mg\,\frac{l}{2}\cos\alpha + F_{\text{тр}}\,l\sin\alpha.$$

Отсюда с $F_{\text{тр}} = F$

$$N = \frac{mg}{2} + F\,\text{tg}\,\alpha.$$

Знак «плюс» и есть распор: чем сильнее тянем тележку, тем сильнее стержень давит на неё.



Силы на стержень и плечи относительно шарнира O. Направление $\vec{R}$ показано условно — в уравнение моментов она не входит.

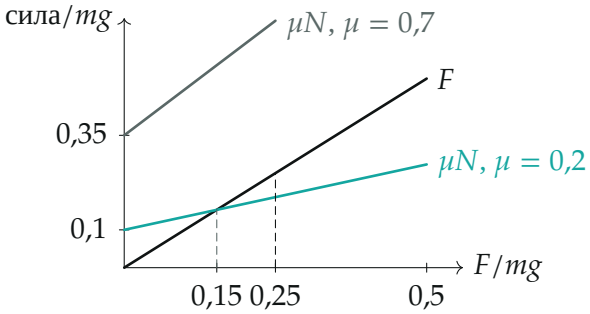
3. Когда тележка сдвинется. Тележка покоится, пока нужная сила трения покоя не превышает максимальную: $F \le \mu N$. Подставим N:

$$F \le \mu\Big(\frac{mg}{2} + F\operatorname{tg}\alpha\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad F\,(1 - \mu\operatorname{tg}\alpha) \le \frac{\mu mg}{2}.$$

Числа ($g = 9{,}8$ м/с^2, $mg = 98$ Н, $F = mg/4 = 24{,}5$ Н, $\operatorname{tg} 60^\circ = 1{,}73$):

$$\mu N = 0{,}2\,(49 + 24{,}5 \cdot 1{,}73)\ \text{Н} = 18{,}3\ \text{Н} < F = 24{,}5\ \text{Н}.$$

Предельного трения не хватает — тележка сдвинется. В виде неравенства: левая часть $24{,}5 \cdot (1 - 0{,}346) = 16{,}0$ Н больше правой 9,8 Н. Граница покоя при $\mu = 0{,}2$ — $F^* = \dfrac{\mu mg/2}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha} = 0{,}153\,mg$, а тянут с силой $0{,}25\,mg$.



Нужное трение F (чёрная) и предельное μN. При $\mu = 0{,}2$ прямые пересекаются при $F = 0{,}153\,mg$: правее тележка едет. При $\mu > \operatorname{ctg}\alpha$ (серая, $\mu = 0{,}7$) предел трения растёт круче F и не догоняется никогда.

4. Заклинивание. В неравенстве $F(1 - \mu\operatorname{tg}\alpha) \le \frac{\mu mg}{2}$ правая часть положительна. Если $1 - \mu\operatorname{tg}\alpha \le 0$, левая часть не больше нуля при любом F, и неравенство выполнено всегда: тележка не сдвинется, как бы сильно её ни тянули. На графике это значит, что прямая μN идёт круче прямой F (наклон $\mu\operatorname{tg}\alpha \ge 1$) и начинается выше неё. Условие:

$$\mu \ge \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58.$$

Если $\mu < \operatorname{ctg}\alpha$, то тележка поедет, как только $F > F^*$.

Обратите внимание. Трение на стержень направлено вправо, а не влево: оно действует со стороны тележки, которую тянут вправо. Именно поэтому в N входит $+F\operatorname{tg}\alpha$. Если тянуть тележку влево, трение «выдёргивает» стержень, N уменьшается, и заклинивания нет.

Проверка. Размерность: $N = mg/2 + F\operatorname{tg}\alpha$ — сила. При $F = 0$ получаем $N = mg/2$ — известный ответ для стержня на шарнире, опёртого концом. Предел $\alpha \to 90°$ (стержень вертикален): $\operatorname{ctg}\alpha \to 0$, заклинивание при любом трении — вертикальный стержень сразу встаёт в распор. Предел $\alpha \to 0$: $\operatorname{ctg}\alpha \to \infty$, лежащий стержень не заклинивает.

Ответ. 1) сдвинется: нужна сила трения $F = 24{,}5$ Н, а предельная $\mu\left(\frac{mg}{2} + F\operatorname{tg}\alpha\right) = 18{,}3$ Н; 2) при $\mu \ge \operatorname{ctg}\alpha = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58$.