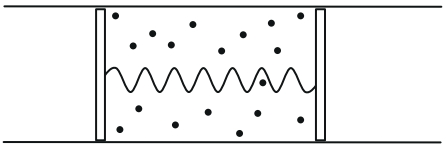
Газ между поршнями с пружиной

Задача 2. [ИОШ 2024/25, 11 класс, задача 2] Внутри гладкой горизонтальной трубы находится $\nu = 5$ моль одноатомного идеального газа, ограниченного с двух сторон двумя подвижными поршнями, соединёнными пружиной (см. рисунок). Газ нагрели, и его температура увеличилась от значения $T_1 = 300$ К до значения $T_2 = 400$ К. Какое количество теплоты нужно подвести для этого к газу, если известно, что длина пружины увеличилась в этом процессе в $n = 1{,}2$ раза? Атмосферным давлением пренебречь. $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



▲ **Решение. Что происходит.** Газ нагревают, он расширяется и растягивает пружину, а поршни расходятся. Подведённая теплота Q идёт на рост внутренней энергии газа и на работу газа над поршнями: $Q = \Delta U + A$ (первое начало термодинамики). Изменение ΔU находится по температурам сразу, а для работы нужно знать, как давление зависит от объёма. Главная идея задачи: давление газа уравновешено только силой пружины (атмосферы нет), сила пружины линейна по удлинению, значит, p — линейная функция V. График $p(V)$ — отрезок прямой, и работа равна площади трапеции под ним. Это задача класса «газ и пружина»: ключ — график $p(V)$.

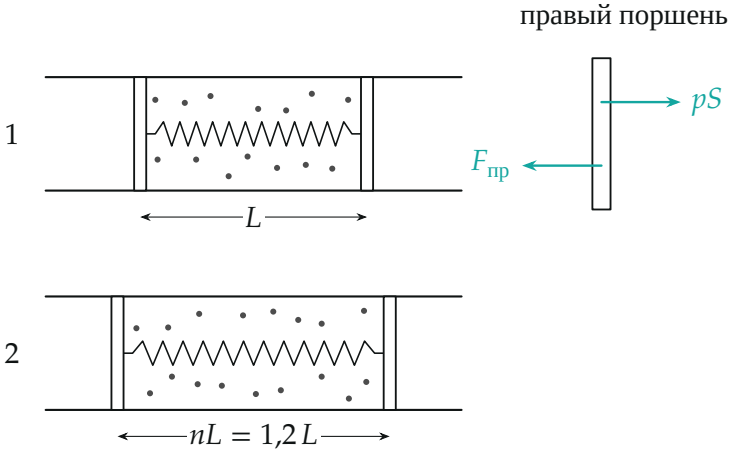
Обозначения. S — площадь поршня; L — длина пружины (расстояние между поршнями), объём газа $V = SL$; индекс 1 — начало, 2 — конец, так что $V_2 = nV_1$; k — жёсткость пружины, L_0 — длина недеформированной пружины; A — работа газа.

1. Давление через силу пружины. Считаем нагревание достаточно медленным: в каждый момент поршни в равновесии, и у газа есть определённое давление. Запишем условие равновесия правого поршня в проекции на ось вдоль трубы (поршень гладкий и труба гладкая, сил вдоль

оси всего две): газ давит на поршень изнутри силой pS, растянутая пружина тянет его внутрь силой $F = k(L - L_0)$, снаружи давления нет:

$$pS = k(L - L_0), \qquad p = \frac{k}{S}(L - L_0) = \frac{k}{S^2}(V - SL_0).$$

Давление — линейная функция объёма: $p = aV + b$ с постоянными a и b.



Начальное и конечное состояния: поршни расходятся, длина пружины и объём газа растут в $n = 1{,}2$ раза. Справа — силы на правый поршень: давление газа pS уравновешено силой пружины $F_{пр}$; в конце обе больше, чем в начале.

2. Внутренняя энергия. Газ одноатомный, у него три поступательные степени свободы, поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\cdot 5 \cdot 8{,}31 \cdot 100\ \text{Дж} \approx 6232\ \text{Дж}.$$

Внутренняя энергия увеличилась, потому что газ нагрели.

3. Работа газа как площадь. Разобьём расширение на малые шаги: при смещении поршней газ совершает работу $p\,dV$, а сумма всех $p\,dV$ от начала до конца — это площадь под графиком $p(V)$. Между состояниями 1 и 2 график — отрезок прямой (пункт 1), поэтому площадь —

трапеция с основаниями p_1 и p_2 и высотой $V_2 - V_1$ (рисунок ниже):

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{n-1}{2}(p_1 V_1 + p_2 V_1).$$

Здесь учтено $V_2 - V_1 = (n-1)V_1$. Тот же результат получается вторым способом — прямоугольник плюс треугольник: $A = p_1 \Delta V + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\Delta V$ при $\Delta V = V_2 - V_1$.

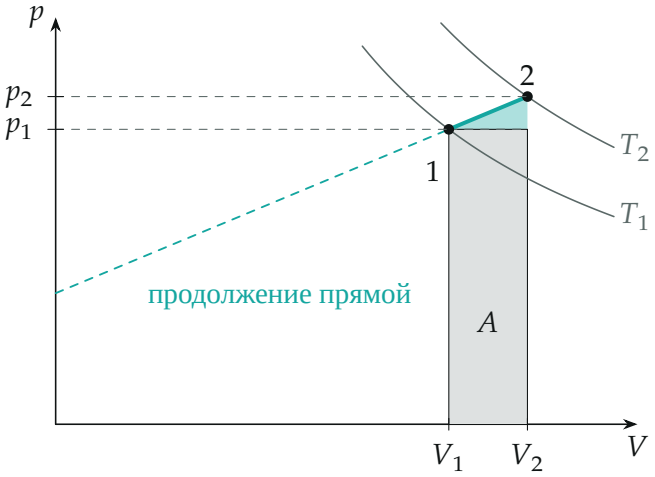


Диаграмма p–V (по осям — в единицах V_1 и p_1; $p_2/p_1 = T_2/(nT_1) = 10/9$). Состояния 1 и 2 лежат на изотермах T_1 и T_2 (серые гиперболы), процесс идёт по прямой. Работа A — серый прямоугольник $p_1\Delta V$ и бирюзовый треугольник $\frac{1}{2}\Delta p\,\Delta V$.

4. Давления через температуры. Применим уравнение Менделеева — Клапейрона к начальному и конечному состояниям: $p_1 V_1 = \nu R T_1$ и $p_2 V_2 = \nu R T_2$. Поскольку $V_2 = nV_1$, получаем $p_2 V_1 = \dfrac{\nu R T_2}{n}$, и работа выражается только через заданные величины:

$$A = \frac{n-1}{2}\left(\nu R T_1 + \frac{\nu R T_2}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}\,\nu R\,(nT_1 + T_2).$$

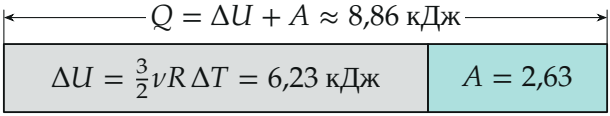
Подставим числа: $A = \dfrac{0{,}2}{2{,}4} \cdot 41{,}55 \cdot (360 + 400)$ Дж ≈ 2632 Дж. Газ

совершает положительную работу: объём вырос.

5. Теплота. Первое начало термодинамики для газа:

$$Q = \Delta U + A = \frac{\nu R}{2}\Big[\,3\,(T_2 - T_1) + \frac{n-1}{n}\,(nT_1 + T_2)\Big].$$

Численно $Q \approx 6232$ Дж $+ 2632$ Дж $\approx 8{,}86$ кДж. Знак: $Q > 0$ — газ в действительности получает теплоту, ведь и U выросла, и работа положительна.



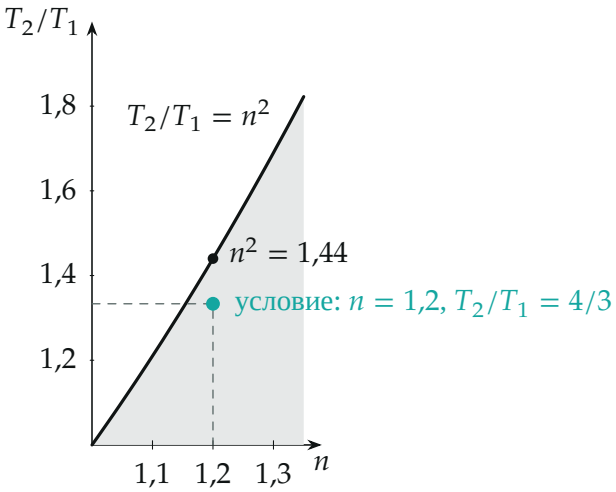
Куда идёт подведённая теплота: $\frac{3}{2}\nu R\Delta T$ — на нагревание, A — на растяжение пружины. Работа $A = 2{,}63$ кДж — это 2,49 кДж (прямоугольник) и 0,14 кДж (треугольник).

Обратите внимание: давление в процессе не постоянно, поэтому работа не равна ни $p_1\Delta V$, ни $\nu R\Delta T$ (это была бы изобара); и не нужны ни жёсткость пружины, ни площадь поршня, ни L_0: достаточно того, что график — прямая.

Проверка. Размерность: νRT — джоуль, $\frac{n-1}{n}$ безразмерно, ответ в джоулях. Предел $n \to 1$: пружина не растянулась, объём не изменился, $A \to 0$ и $Q \to \frac{3}{2}\nu R\Delta T$ — изохорный нагрев, как и должно быть. Второй способ найти A — энергия пружины: поршни получают от газа работу A, которая целиком превращается в упругую энергию пружины (поршни лёгкие, трения нет), и $A = \Delta E_{\text{пр}} = \frac{F_1 + F_2}{2}\,(L_2 - L_1) = \frac{(p_1 + p_2)S}{2} \cdot \frac{V_2 - V_1}{S}$ — та же трапеция.

Замечание о данных (на ответ не влияет). Это замечание для любопытных, решение выше от него не зависит. Для обычной пружины длина в ненапряжённом состоянии L_0 положительна, и из $pS = k(L - L_0)$ следует, что давление растёт быстрее объёма: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{nL_1 - L_0}{L_1 - L_0} \geqslant n$, а значит, $\frac{T_2}{T_1} = n\frac{p_2}{p_1} \geqslant n^2$. При $n = 1{,}2$ газ пришлось бы нагреть хотя

бы до $1{,}44 \cdot 300 = 432$ К, а в условии $T_2 = 400$ К. Числа условия соответствуют «пружине» с $L_0 = -0{,}8\,L_1$: прямая $p(V)$, продолженная до $V = 0$, проходит выше нуля (пунктир на диаграмме p–V). Такую пружину не сделать, но ответ от этого не меняется: он использует только то, что $p(V)$ — прямая, а это верно при любом L_0. Так что найденное Q — именно то, что имели в виду авторы.



Нижний предел нагрева для пружины с $L_0 \geqslant 0$ — кривая $T_2/T_1 = n^2$. Серая область под ней недостижима; точка условия ($n = 1{,}2$, $T_2/T_1 = 4/3$) лежит в этой области, на кривой при $n = 1{,}2$ было бы $1{,}44$.

Физический смысл такой: теплота идёт на нагрев газа и на запасание энергии в пружине, а запасённая энергия — это просто площадь трапеции на диаграмме p–V.

Ответ. $Q = \dfrac{\nu R}{2}\left[3\,(T_2 - T_1) + \dfrac{n-1}{n}\,(nT_1 + T_2)\right] \approx 8{,}86$ кДж.