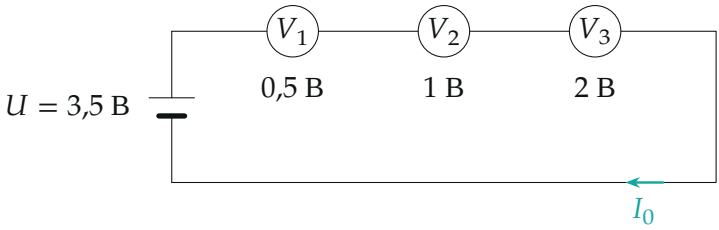
Три вольтметра

Задача 3. [ИОШ 2024/25, 11 класс, задача 3] Три вольтметра соединили последовательно и подключили к ним источник напряжения. При этом показания вольтметров оказались следующими: $U_1 = 0{,}5$ В, $U_2 = 1$ В, $U_3 = 2$ В. Затем два вольтметра соединили параллельно, подключили к ним последовательно третий вольтметр, а к выводам этой цепи — тот же источник напряжения. Оказалось, что один из вольтметров не изменил свои показания. Найти показания двух других вольтметров. Напряжение источника считать неизменным.



Поясняющий рисунок: первое соединение — три вольтметра последовательно (в условии рисунка нет). Показания вольтметров и ток I_0 в цепи.

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр с конечным сопротивлением — это резистор, который заодно показывает напряжение на себе: $U = IR$. Поэтому по первому опыту можно узнать, во сколько раз сопротивления вольтметров отличаются друг от друга. Во втором опыте вольтметров снова три, но один из них включён последовательно, а два других — параллельно, и какой именно будет «одиночкой», мы не знаем. Вариантов всего три, и для каждого показания находятся однозначно, как у делителя напряжения. Останется сравнить их с первым опытом и оставить те варианты, где один вольтметр показывает прежнее. Это цепь с идеальным источником напряжения, а не тока: меняется ток, а напряжение U у источника остаётся.

Обозначения. R_1, R_2, R_3 — сопротивления вольтметров; U — напряжение источника; I_0 — ток в первом опыте; во втором опыте величины со штрихом.

1. Первый опыт. Вольтметры включены последовательно, ток через них общий. Напряжение источника равно сумме напряжений на вольтметрах:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 0{,}5 + 1 + 2 = 3{,}5\ \text{В}.$$

Закон Ома для каждого вольтметра, $U_i = I_0 R_i$, при одном и том же I_0 даёт $R_1 : R_2 : R_3 = U_1 : U_2 : U_3$:

$$R_1 = r, \qquad R_2 = 2r, \qquad R_3 = 4r, \qquad I_0 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{0{,}5\ \text{В}}{r}.$$

Неизвестное r нам не понадобится — в ответ войдут только отношения.

2. Один вольтметр — последовательно, два — параллельно. Пусть последовательно с источником включён вольтметр s, а параллельно — вольтметры p и q. Напряжение на параллельной паре — общее для обоих её вольтметров, обозначим его x: именно столько показывают оба. Ток через вольтметр s — полный ток цепи I', он равен сумме токов через p и q. Напряжение источника делится между s и парой пропорционально сопротивлениям:

$$x = U\,\frac{R_{pq}}{R_s + R_{pq}}, \qquad R_{pq} = \frac{R_p R_q}{R_p + R_q}, \qquad U_s' = U - x.$$

3. Последовательный вольтметр всегда меняет показание. Сопротивление двух параллельных вольтметров меньше сопротивления любого из них, поэтому общее сопротивление цепи уменьшилось по сравнению с первым опытом ($R_1 + R_2 + R_3$ стало $R_s + R_{pq}$). Напряжение источника прежнее, значит, ток вырос: $I' > I_0$. Показание последовательного вольтметра $U_s' = I' R_s$ тоже выросло. Значит, «прежнее показание» может быть только у одного из параллельных вольтметров — у тех, где напряжение x может случайно совпасть с прежним.

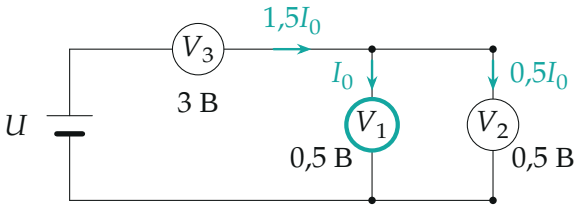
Остаётся проверить три варианта: «одиночкой» будет третий, первый или второй вольтметр.

Вариант (а): последовательно V_3, параллельно V_1 и V_2.

$$R_{12} = \frac{r \cdot 2r}{r + 2r} = \frac{2}{3}r,$$

$$x = 3{,}5 \cdot \frac{2/3}{4 + 2/3} = 0{,}5\ \text{В}, \qquad U_3' = 3{,}5 - 0{,}5 = 3\ \text{В}.$$

Показания: $V_1 = 0{,}5$ В, $V_2 = 0{,}5$ В, $V_3 = 3$ В. Первый вольтметр показывает прежние 0,5 В — «не изменился»; второй уменьшил показание (было 1 В), третий увеличил. Вариант подходит.



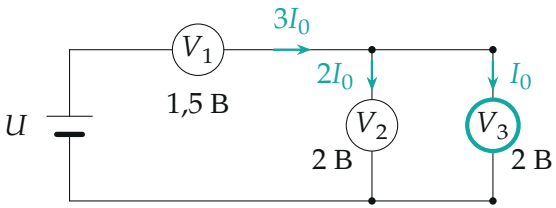
Вариант (а). Токи — в единицах I_0, показания — в вольтах. Ток через V_1 тот же, что в первом опыте (I_0), и показание то же; через V_2 идёт $0{,}5I_0$; суммарный ток $1{,}5I_0$.

Вариант (б): последовательно V_1, параллельно V_2 и V_3.

$$R_{23} = \frac{2r \cdot 4r}{2r + 4r} = \frac{4}{3}r,$$

$$x = 3{,}5 \cdot \frac{4/3}{1 + 4/3} = 2\ \text{В}, \qquad U_1' = 3{,}5 - 2 = 1{,}5\ \text{В}.$$

Показания: $V_1 = 1{,}5$ В, $V_2 = 2$ В, $V_3 = 2$ В. Третий вольтметр показывает прежние 2 В; первый показывал 0,5 В, второй — 1 В: оба изменились. Вариант подходит.



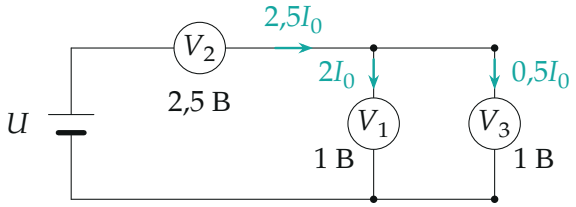
Вариант (б). Ток через V_3 прежний (I_0), через V_2 вдвое больший, суммарный ток $3I_0$.

Вариант (в): последовательно V_2, параллельно V_1 и V_3.

$$R_{13} = \frac{r \cdot 4r}{r + 4r} = \frac{4}{5}r,$$

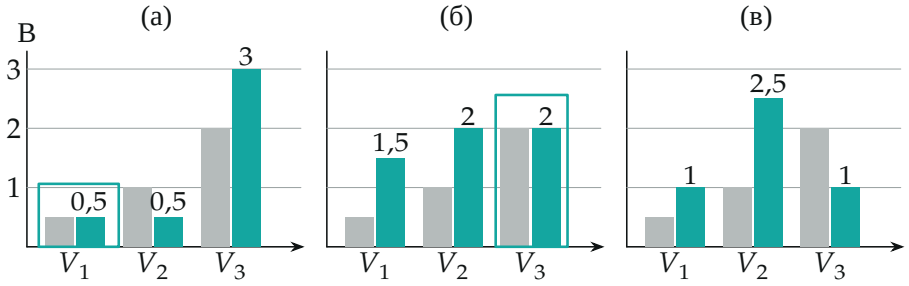
$$x = 3{,}5 \cdot \frac{4/5}{2 + 4/5} = 1\text{ В}, \qquad U_2' = 3{,}5 - 1 = 2{,}5\text{ В}.$$

Показания: $V_1 = 1$ В, $V_2 = 2{,}5$ В, $V_3 = 1$ В. Прежнее было 0,5, 1 и 2 В: не совпало ни одно. Вариант не подходит.



Вариант (в): ни один вольтметр не сохранил показание.

Второй способ — от обратного. Допустим, что в варианте (в) не изменил показание первый вольтметр: $V_1 = 0{,}5$ В. Тогда третий, параллельный ему, показывает те же 0,5 В, ток через первый остался I_0, а через третий — $\dfrac{0{,}5\text{ В}}{4r} = \dfrac{I_0}{4}$. Полный ток $\dfrac{5}{4}I_0$, показание $V_2 = \dfrac{5}{4}I_0 \cdot 2r = 1{,}25$ В, и сумма $V_2 + V_1 = 1{,}75$ В не равна 3,5 В. Противоречие. Так же отбрасывается предположение $V_3 = 2$ В (второй вольтметр выйдет на 5 В).



Сравнение показаний (серые столбцы — первый опыт, бирюзовые — второй). Обведена группа, где показание сохранилось: в вариантах (а) и (б) — по одной, в (в) — ни одной.

Обратите внимание: вольтметры здесь не идеальные — через них течёт ток. У идеальных вольтметров (бесконечное сопротивление) в последовательной цепи ничего бы не делилось. Кроме того, у источника неизменно напряжение, а ток — нет: брать в новой цепи прежний ток I_0 для всех вольтметров нельзя. И подходит не один вариант, а два: решение нельзя заканчивать на первом найденном.

Проверка. Размерность: показания в вольтах, сопротивления входят отношениями. В каждом ответе сумма «показание одиночки + показание пары» равна напряжению источника: $3+0{,}5 = 3{,}5$ В и $1{,}5+2 = 3{,}5$ В. В варианте (а) полный ток $1{,}5I_0$, в (б) — $3I_0$, в (в) — $2{,}5I_0$: во всех он больше I_0, как и требует пункт 3.

Физический смысл такой: показание вольтметра пропорционально току через него, а потому «не изменился» может быть только тот из параллельных, через который течёт тот же ток, что и раньше.

Ответ. Подходят два способа включения. 1) Параллельно V_1 и V_2, последовательно V_3 (не изменилось показание V_1): $V_2 = 0{,}5$ В, $V_3 = 3$ В. 2) Параллельно V_2 и V_3, последовательно V_1 (не изменилось показание V_3): $V_1 = 1{,}5$ В, $V_2 = 2$ В.