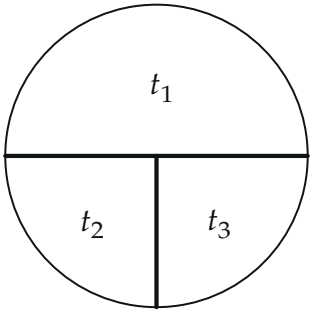
Три отсека с водой разной температуры

Задача 4. [ИОШ 2024/25, 11 класс, задача 4] Вертикальный цилиндрический сосуд разделён не пропускающими воду вертикальными теплопроводящими перегородками на три части, одна из которых составляет половину сосуда, а две другие — по одной четверти сосуда (см. рисунок, вид сверху). В получившиеся отсеки до самого верха сосуда налита вода при разной температуре — $t_1 = 80\ ^\circ\text{C}$, $t_2 = 20\ ^\circ\text{C}$, $t_3 = 40\ ^\circ\text{C}$. Известно, что через некоторое время горячая вода остыла на $\Delta t = 1\ ^\circ\text{C}$. Как изменилась температура воды в других отсеках? Перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, сосуд теплоизолирован. *Указание.* Поток тепла между телами пропорционален площади их контакта и разности температур.



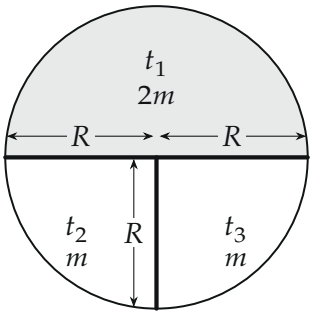
▲ **Решение. Что происходит.** Тепло идёт сквозь перегородки от горячей воды к холодной: сосуд теплоизолирован, так что перегородки — единственный путь теплообмена. Горячая вода остыла на один градус, а разности температур между отсеками — десятки градусов, поэтому за это время потоки тепла почти не изменились. Значит, для каждого отсека можно написать уравнение теплового баланса с постоянными потоками. Главная идея: все три перегородки одинаковы, так что потоки через них записываются через одну и ту же постоянную k, и три уравнения баланса позволяют найти все три неизвестные: k и нагрев двух других отсеков. Это задача на теплообмен через стенки: выразить потоки через разности температур и написать баланс для каждого отсека.

Обозначения. m — масса воды в четверти сосуда, c — удельная теплоёмкость воды; τ — время опыта; k — коэффициент пропорциональности потока тепла и разности температур для одной перегородки; Q_{ij} — поток тепла (теплота за время τ) из отсека i в отсек j. Изменения температур отсеков 2 и 3 обозначим Δt_2 и Δt_3 (отсек 1 остыл на Δt).

1. Массы и площади контактов. Воду налили до самого верха, поэтому высота воды в отсеках одинакова, а массы пропорциональны площадям отсеков в плане: в отсеке 1 масса $2m$, в отсеках 2 и 3 по m. Площадь контакта — это длина перегородки, умноженная на высоту воды. Горизонтальный диаметр вертикальным радиусом поделён на две половины длиной R, и сама вертикальная перегородка длиной R (рисунок): значит, площади всех трёх контактов равны. По указанию поток через перегородку, одинаковую по толщине и материалу, зависит только от разности температур:

$$Q_{ij} = k\,(t_i - t_j)\,\tau,$$

где i — более тёплый отсек. Начальные потоки: $Q_{12} = 60\,k\tau$, $Q_{13} = 40\,k\tau$ и $Q_{32} = 20\,k\tau$ (в градусах).

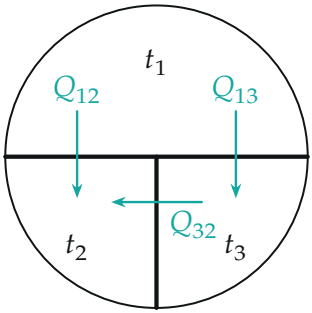


Размеры отсеков: длины всех трёх перегородок равны R, вода налита до верха; массы воды $2m$, m, m.

2. Потоки считаем постоянными. Температуры за опыт изменились на единицы градусов, а разности между ними — на десятки, поэтому потоки изменились лишь на несколько процентов. Поэтому в уравнениях ниже разности температур берём начальные — иначе уравнения были бы дифференциальными. (Проверка этого допущения — в конце.)

3. Тепловой баланс каждого отсека. Теплота, полученная или отданная отсеком за время τ, равна $cm'\Delta t$, где m' — масса воды. Тепло идёт от t_1 к t_3 и t_2, и от t_3 к t_2 (рисунок). Отсек 1 только отдаёт тепло, отсек 2 только получает, отсек 3 получает от отсека 1 и отдаёт отсеку 2. Подставим $Q_{ij} = k(t_i - t_j)\tau$:

$$\begin{aligned} 2cm\,\Delta t &= k\tau\,[(t_1 - t_2) + (t_1 - t_3)], \\ cm\,\Delta t_2 &= k\tau\,[(t_1 - t_2) + (t_3 - t_2)], \\ cm\,\Delta t_3 &= k\tau\,[(t_1 - t_3) - (t_3 - t_2)]. \end{aligned}$$



Потоки тепла между отсеками: из 1 в 2 и в 3, из 3 в 2.

4. Исключаем $k\tau$. Неизвестными в трёх уравнениях остались $k\tau$, Δt_2 и Δt_3. Из первого уравнения находим $k\tau$ и подставляем во второе и третье:

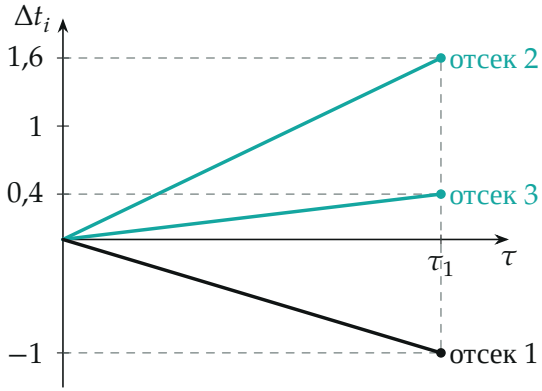
$$k\tau = \frac{2cm\,\Delta t}{2t_1 - t_2 - t_3},$$

$$\Delta t_2 = \frac{2\,(t_1 + t_3 - 2t_2)}{2t_1 - t_2 - t_3}\,\Delta t = \frac{2\,(80 + 40 - 40)}{100} \cdot 1\ ^\circ\mathrm{C} = 1{,}6\ ^\circ\mathrm{C},$$

$$\Delta t_3 = \frac{2\,(t_1 + t_2 - 2t_3)}{2t_1 - t_2 - t_3}\,\Delta t = \frac{2\,(80 + 20 - 80)}{100} \cdot 1\ ^\circ\mathrm{C} = 0{,}4\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Здесь $2t_1 - t_2 - t_3 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$. Оба изменения положительны: самая холодная вода (20 °C) нагрелась на 1,6 °C, а средняя (40 °C) — на 0,4 °C. Знак Δt_3 не очевиден заранее: отсек 3 и получает тепло от горячего, и

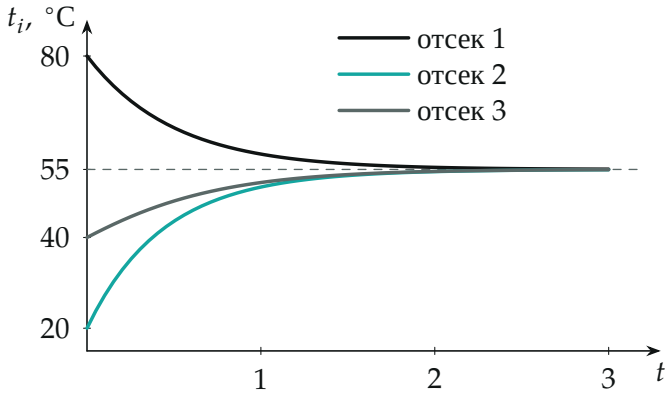
отдаёт его холодному. Он нагревается, потому что получает от разности $t_1 - t_3 = 40\ ^\circ\text{C}$ больше, чем отдаёт через разность $t_3 - t_2 = 20\ ^\circ\text{C}$.



Изменения температур в отсеках за время опыта (потоки постоянны, поэтому температуры меняются линейно): отсек 1 остыл на $1\ ^\circ\text{C}$, отсек 2 нагрелся на $1{,}6\ ^\circ\text{C}$, отсек 3 — на $0{,}4\ ^\circ\text{C}$. Момент τ_1 — конец опыта.

Обратите внимание: у отсека 3 есть и приток, и отток, поэтому заранее неясно, греется он или остывает. Уравнение $cm\,\Delta t_3 = Q_{13} - Q_{32}$ записано для нагрева; отрицательный результат означал бы остывание. Здесь получилось положительное число: приток ($40\,k\tau$) больше оттока ($20\,k\tau$).

Проверка. Энергия: сосуд теплоизолирован, суммарная теплота всех отсеков не меняется, то есть $2cm \cdot (-\Delta t) + cm\,\Delta t_2 + cm\,\Delta t_3 = 0$, или $-2 \cdot 1 + 1{,}6 + 0{,}4 = 0$ — верно. Предел $t_3 \to t_2$ (две четверти одинаковой температуры): $\Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t$ — две четверти делят поровну тепло, ушедшее из половины; формулы это дают. Предел $t_3 = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$: отсек 3 получает и отдаёт одинаково, $\Delta t_3 = 0$, и формула тоже даёт нуль. Допущение о постоянстве потоков проверим на точных уравнениях $\dot{t}_i$ с теми же потоками: решение даёт к моменту остывания горячего отсека на $1\ ^\circ\text{C}$ значения $\Delta t_2 \approx 1{,}594\ ^\circ\text{C}$ и $\Delta t_3 \approx 0{,}406\ ^\circ\text{C}$ — отличие от ответа меньше $0{,}5\,\%$.



Что будет дальше (точное решение уравнений теплообмена; время — в единицах cm/k): температуры сходятся к общему значению $(2\cdot 80+20+40)/4 = 55$ °C. Весь опыт из условия занимает на этой шкале лишь первые 0,02 — там кривые ещё прямолинейны.

Физический смысл такой: тепло из горячего отсека делится между холодными пропорционально разностям температур. Сильнее всех нагревается самый холодный отсек: разность с горячим у него больше, и тепло к нему идёт с двух сторон — и от горячего, и от среднего.

Ответ. Вода в самом холодном отсеке (t_2) нагрелась на $\Delta t_2 = 2(t_1 + t_3 - 2t_2)\,\Delta t/(2t_1 - t_2 - t_3) = 1{,}6$ °C, в отсеке со средней температурой (t_3) — на $\Delta t_3 = 2(t_1 + t_2 - 2t_3)\,\Delta t/(2t_1 - t_2 - t_3) = 0{,}4$ °C.