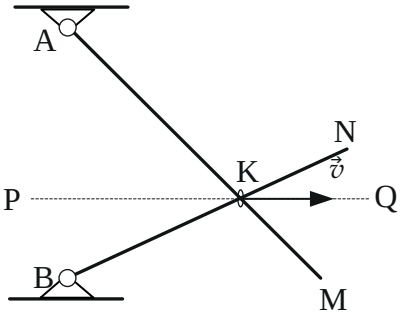
Колечко на двух шарнирных стержнях

Задача 5. [ИОШ 2024/25, 11 класс, задача 5] Два длинных стержня AM и BN прикреплены шарнирно к полу и потолку в точках A и B, находящихся друг под другом на расстоянии l. На стержни надето колечко K, которое может без трения скользить по ним. Колечко перемещается с постоянной скоростью v вдоль горизонтальной прямой PQ, причём $AP : PB = 2 : 1$ (см. рисунок). Найти угловую скорость стержней в тот момент времени, когда $AK = AB$.



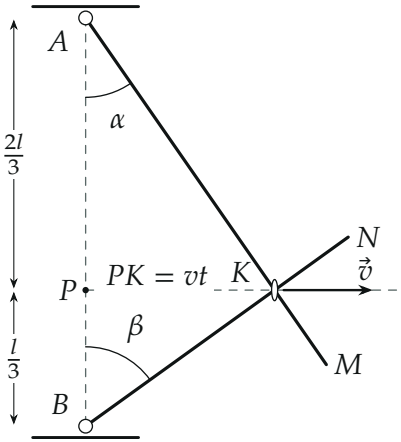
▲ **Решение. Что происходит.** Колечко надето на оба стержня сразу, поэтому в любой момент оно лежит на пересечении двух прямых: каждый стержень направлен из своего шарнира в точку K. Колечко едет по горизонтали, значит, стержни поворачиваются вокруг шарниров, и скорость поворота можно найти из положения колечка. Главная идея: выразить тангенс угла стержня через путь колечка (задача «с катетами»: прямоугольные треугольники APK и BPK) и продифференцировать по времени. Это кинематическая связь: перемещение колечка однозначно задаёт поворот каждого стержня. Второй способ — разложить скорость колечка на скольжение по стержню и поворот стержня.

Обозначения. α — угол между AB и стержнем AM (при шарнире A), β — угол между BA и стержнем BN (при шарнире B); $\omega_{AM} = \dot{\alpha}$, $\omega_{BN} = \dot{\beta}$. Время отсчитаем от момента, когда колечко проходит точку P. Прямая PQ горизонтальна, AB вертикальна, поэтому угол P в треугольниках APK и BPK прямой; по условию $AP = 2l/3$ и $PB = l/3$.

1. Углы стержней через путь колечка. Колечко движется равномерно, поэтому $PK = vt$. Из прямоугольных треугольников APK и BPK (рисунок):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PK}{AP} = \frac{3vt}{2l}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{PK}{PB} = \frac{3vt}{l}.$$

Обратите внимание: сами углы не растут пропорционально времени, а их тангенсы — растут. Поэтому угловая скорость стержня зависит от положения колечка, и её нужно искать в заданный момент, а не как α/t.



Произвольный момент: колечко K на расстоянии $PK = vt$ от точки P. Стержни направлены из шарниров A и B в точку K, углы α и β отсчитываются от вертикали AB.

2. Дифференцируем по времени. Продифференцируем оба равенства по t. У левой части — производная сложной функции:

$$\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{dt} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt}.$$

Получаем

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\dot\alpha = \frac{3v}{2l}, \qquad \frac{1}{\cos^2\beta}\,\dot\beta = \frac{3v}{l},$$

откуда

$$\omega_{AM} = \frac{3v}{2l}\cos^2\alpha, \qquad \omega_{BN} = \frac{3v}{l}\cos^2\beta.$$

Качественная картина: в момент прохождения точки P оба стержня вертикальны, $\cos = 1$, и скорость колечка перпендикулярна стержням — они вращаются быстрее всего, $\omega_{AM} = 3v/(2l)$ и $\omega_{BN} = 3v/l$. Потом колечко удаляется от P, стержни ложатся, косинусы падают, и угловые скорости убывают (график в конце).

3. Нужный момент: $AK = AB = l$**.** Найдём косинусы углов в этот момент из прямоугольных треугольников. Для стержня AM:

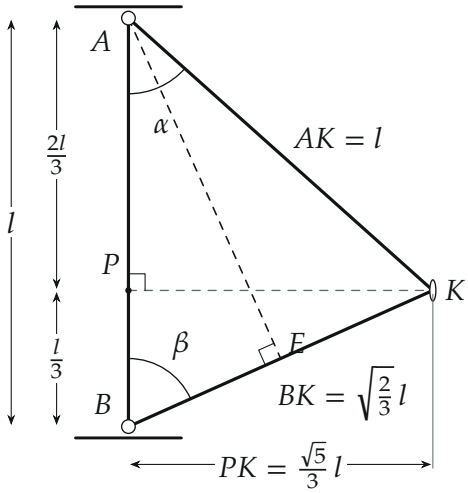
$$\cos\alpha = \frac{AP}{AK} = \frac{2l/3}{l} = \frac{2}{3}.$$

Для стержня BN нужна длина BK, а не AK. Сначала $PK = \sqrt{AK^2 - AP^2}$, затем BK:

$$PK = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}l,$$

$$BK = \sqrt{PB^2 + PK^2} = \sqrt{\frac{l^2}{9} + \frac{5l^2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}l,$$

$$\cos\beta = \frac{PB}{BK} = \frac{l/3}{\sqrt{2/3}\,l} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$



Момент $AK = AB = l$. Треугольник ABK равнобедренный; $PK = \sqrt{5}l/3$,

$BK = \sqrt{2/3}\,l$. Точка E — основание высоты из A (так же $\cos\beta$ находится из подобия $\triangle ABE \sim \triangle PBK$).

4. Подставляем.

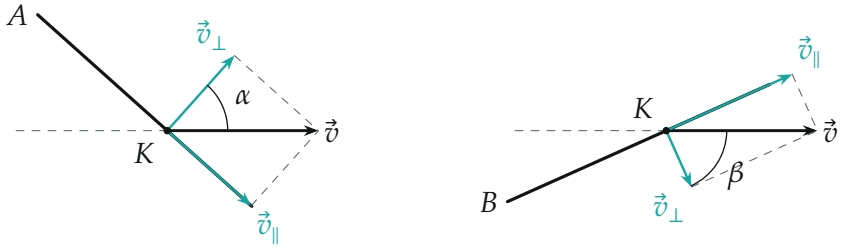
$$\omega_{AM} = \frac{3v}{2l}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2v}{3l}, \qquad \omega_{BN} = \frac{3v}{l}\cdot\frac{1}{6} = \frac{v}{2l}.$$

Стержень AM вращается против часовой стрелки (угол α растёт), стержень BN — по часовой.

Второй способ — без производной. За малое время dt колечко смещается на $v\,dt$ по горизонтали. Оно лежит на стержне, поэтому смещение вдоль стержня — это скольжение по нему, а смещение перпендикулярно стержню — поворот стержня: точка стержня на расстоянии r от шарнира движется перпендикулярно стержню со скоростью ωr. Значит, $\omega \cdot AK = v_\perp$, где $v_\perp$ — составляющая $\vec{v}$, перпендикулярная стержню. Стержень AM наклонён к вертикали на угол α, поэтому перпендикуляр к нему наклонён к горизонтали на тот же угол, и $v_\perp = v\cos\alpha$. Аналогично для BN (рисунок):

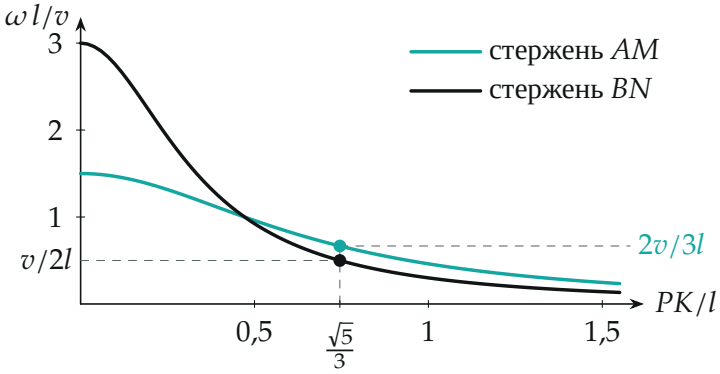
$$\omega_{AM} = \frac{v\cos\alpha}{AK} = \frac{v\cdot\frac{2}{3}}{l} = \frac{2v}{3l}, \qquad \omega_{BN} = \frac{v\cos\beta}{BK} = \frac{v/\sqrt{6}}{\sqrt{2/3}\,l} = \frac{v}{2l}.$$

Результаты совпали с пунктом 4. В общем виде этот способ даёт те же формулы: $AK = AP/\cos\alpha$, поэтому $\omega_{AM} = \dfrac{v\cos^2\alpha}{AP} = \dfrac{3v}{2l}\cos^2\alpha$.



Разложение скорости колечка в момент $AK = AB = l$ для каждого из стержней: $v_\parallel$ — скольжение по стержню, $v_\perp$ — то, что вращает стержень. Для AM угол между $\vec{v}$ и $\vec{v}_\perp$ равен α ($v_\perp = v\cos\alpha$), для BN — β ($v_\perp = v\cos\beta$).

Проверка. Размерность: v/l — обратная секунда. В момент $t = 0$ формулы дают $\omega_{AM} = v/AP$ и $\omega_{BN} = v/PB$ — колечко движется перпендикулярно стержням, и стержень поворачивается как при вращении вокруг шарнира с радиусом AP или PB. При $t \to \infty$ cos $\to 0$ и $\omega \to 0$ — далёкое колечко почти не поворачивает стержни. Оба способа дают одни и те же числа; численная проверка: производная $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в момент $PK = \sqrt{5}\,l/3$ равна $2v/(3l)$ и $v/(2l)$.



Угловые скорости стержней как функции положения колечка: $\omega_{AM} = \dfrac{3v/2l}{1 + (3x/2)^2}$, $\omega_{BN} = \dfrac{3v/l}{1 + (3x)^2}$, *где* $x = PK/l$. *Точки на пунктире — момент* $AK = AB$ ($x = \sqrt{5}/3$): $\omega_{AM} = 2v/3l$, $\omega_{BN} = v/2l$.

Физический смысл такой: стержень, ближе к которому проходит колечко, раскручивается сильнее, но с удалением колечка теряет скорость быстрее; в момент $AK = AB$ отношение скоростей $\omega_{BN}/\omega_{AM} = 3/4$.

Ответ. $\omega_{AM} = \dfrac{2v}{3l}$ (против часовой стрелки), $\omega_{BN} = \dfrac{v}{2l}$ (по часовой стрелке).