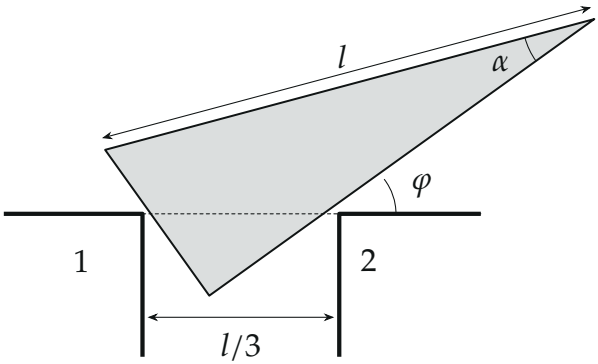
Клин на двух уступах

Задача 6. [ИОШ 2024/25, 11 класс, задача 6] Гладкий прямоугольный клин массой m с одним из острых углов α опирается на два гладких прямоугольных уступа 1 и 2, расположенных на одной и той же высоте (см. рисунок). Расстояние между уступами равно одной трети длины самой длинной стороны клина. Клин находится в равновесии. Найти угол φ и силы реакции уступов N_1 и N_2. Трение отсутствует.



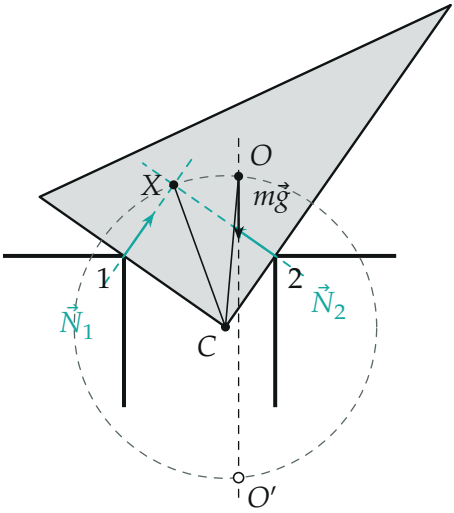
▲ **Решение. Что происходит.** Клин лежит на углах двух уступов и находится в равновесии. Рисунок условия — только схема: клин на нём наклонён произвольно и в равновесии не находится, угол φ на нём «на глаз». Найти надо, каким φ будет на самом деле, поэтому никакие углы с рисунка условия в решении не используем. На него действуют три силы: тяжесть $m\vec{g}$ и две реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Грани гладкие, поэтому каждая реакция перпендикулярна той грани, которой касается угол уступа. Три непараллельные силы уравновешивают тело, только если их линии действия пересекаются в одной точке; иначе у тела есть вращающий момент. Главная идея: линии $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ пересекаются в точке X, и эта точка лежит на вертикали через центр тяжести. Расстояния от вершины прямого угла до X и до центра тяжести оба равны $l/3$, откуда точки совпадают, и положение клина определено. Это задача на равновесие тела с гладкими опорами: «три силы — одна точка». Второй способ — минимум потенциальной энергии.

Обозначения. C — вершина прямого угла клина, A — вершина угла α, B — третья вершина; $AB = l$ — гипотенуза (самая длинная сторона), M — её середина. O — центр тяжести клина (точка пересечения медиан). 1 и 2 — уступы и точки касания: уступ 1 касается грани CB, уступ 2 — грани CA. φ — угол между гранью CA и горизонталью; $12 = l/3$ — расстояние между уступами, K — середина отрезка 12.

Пункт 1. Первый способ: силы пересекаются в одной точке.

1. Направления реакций. Угол уступа касается гладкой грани, трения нет, поэтому $\vec{N}_1 \perp CB$ и $\vec{N}_2 \perp CA$. Клин покоится, значит, $\sum \vec{F} = 0$ и сумма моментов равна нулю относительно любой точки.

2. Силы сходятся в одной точке. Линии действия $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ пересекаются в некоторой точке X. Выберем моменты относительно X: моменты $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ равны нулю, значит, и момент $m\vec{g}$ равен нулю. Это возможно, только если вертикаль через O проходит через X.



Неравновесное положение (для $\varphi = 55°$): линии $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (пунктир) пересекаются в точке X, но вертикаль через центр тяжести O мимо неё проходит — есть вращающий момент. Окружность радиуса $l/3$ с центром C проходит и через X, и через O.

3. Прямоугольник $C\,1\,X\,2$**.** В четырёхугольнике $C\,1\,X\,2$ три прямых угла: в C (угол клина), в 1 и в 2 ($\vec{N}_1 \perp CB$, $\vec{N}_2 \perp CA$). Значит, это прямо-

угольник, и его диагонали равны: $CX = 12 = l/3$. С другой стороны, в прямоугольном треугольнике медиана из вершины прямого угла равна половине гипотенузы, $CM = l/2$, а центр тяжести лежит на ней на $2/3$ длины от вершины: $CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$. Получили $CX = CO = l/3$: обе точки лежат на окружности радиуса $l/3$ с центром C.

4. Точки X и O совпадают. Обе точки лежат на одной вертикали (пункт 2) и на этой окружности. Вертикаль пересекает окружность в двух точках: в O и в точке O', симметричной O относительно горизонтали, проведённой через C. Но C — самая нижняя точка клина (обе грани идут от неё вверх), а точка O' лежит ниже C. Точка X, как и O, лежит внутри угла C, то есть выше C. Следовательно, $X = O$.

5. Угол φ. Диагонали прямоугольника $C\,1\,X\,2$ делятся пополам в точке пересечения, и это — середина 12, точка K. Значит, K — середина $CX = CO$, и луч CK идёт по медиане CM. Найдём углы со стороной CA:

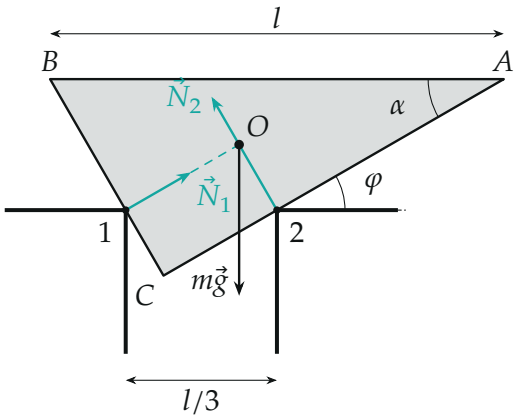
- $MC = MA = l/2$, треугольник MCA равнобедренный, $\angle MCA = \angle MAC = \alpha$;
- $KC = K2 = l/6$ (диагонали прямоугольника равны и делятся пополам), треугольник $KC2$ равнобедренный, и $\angle KC2 = \angle K2C = \varphi$ — это угол между горизонталью 12 и гранью CA.

Лучи CK и CM совпадают, значит,

$$\varphi = \alpha.$$

Грань CA составляет с горизонталью тот же угол α, что с гипотенузой, поэтому гипотенуза клина горизонтальна.

6. Силы реакции. Теперь все три силы сходятся в O, и остаётся $\sum \vec{F} = 0$. Вектор $\vec{N}_1 \perp CB$ направлен вдоль грани CA (под углом α к горизонту), $\vec{N}_2 \perp CA$ — вдоль грани CB. Возьмём ось вдоль CA: сила $\vec{N}_2$ к ней перпендикулярна и в уравнение не войдёт, а проекция $m\vec{g}$ на эту ось равна $mg\sin\alpha$ (грань CA наклонена к горизонту на α). Отсюда $N_1 = mg\sin\alpha$. Ось вдоль CB (наклон к горизонту $90° - \alpha$): проекция $m\vec{g}$ равна $mg\cos\alpha$, и $N_2 = mg\cos\alpha$.

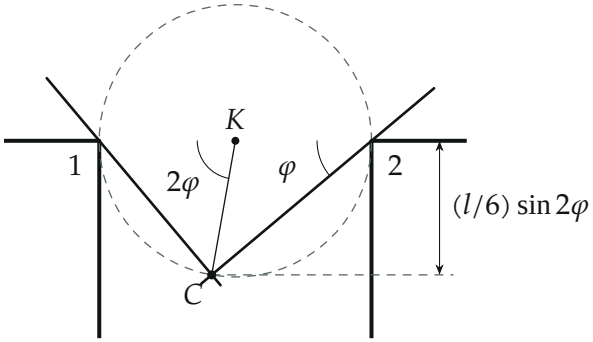


Равновесие (рисунок для $\alpha = 30°$): гипотенуза горизонтальна, $\varphi = \alpha$, силы $\vec{N}_1, \vec{N}_2, m\vec{g}$ сходятся в центре тяжести O. Уступы касаются граней в трети их длины от вершины C.

Обратите внимание: реакции направлены не вертикально, а перпендикулярно граням — опора угловая, грани гладкие. Условие $12 = l/3$ существенно: именно оно даёт $CX = CO$; при другом расстоянии равновесное положение было бы другим. И одного условия $\sum \vec{F} = 0$ мало: положение клина (угол φ) находится из равенства нулю моментов.

Пункт 2. Второй способ: минимум потенциальной энергии. На гладких опорах положение равновесия — такое, при котором потенциальная энергия $W = mgh$ минимальна, где h — высота центра тяжести над уровнем уступов. Найдём $h(\varphi)$ для произвольного положения.

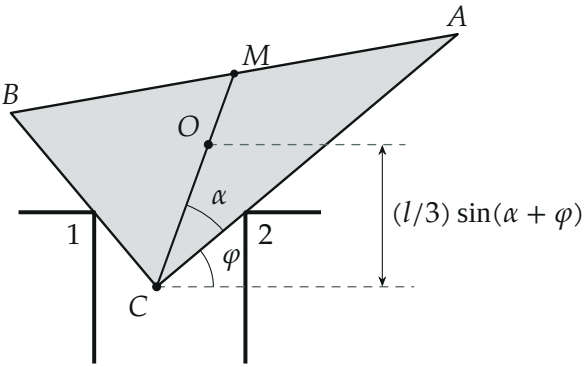
7. Где вершина C. Вершина C видит отрезок 12 под прямым углом (угол клина), поэтому лежит на окружности с диаметром 12: центр K, радиус $l/6$. Треугольник $KC2$ равнобедренный с углами φ при основании, поэтому внешний угол при K равен 2φ. Значит, C ниже уровня уступов на $(l/6)\sin 2\varphi$.



Вершина C на окружности с диаметром 12; $\angle K2C = \varphi$, $\angle 1KC = 2\varphi$, *глубина C под уступами —* $(l/6)\sin 2\varphi$.

8. Где центр тяжести. Отрезок $CO = l/3$ идёт по медиане CM, а она составляет с гранью CA угол α (пункт 5) и с горизонталью угол $\alpha + \varphi$. Центр тяжести выше C на $(l/3)\sin(\alpha + \varphi)$ (рисунок). Высота над уступами

$$h(\varphi) = \frac{l}{3}\sin(\alpha + \varphi) - \frac{l}{6}\sin 2\varphi.$$

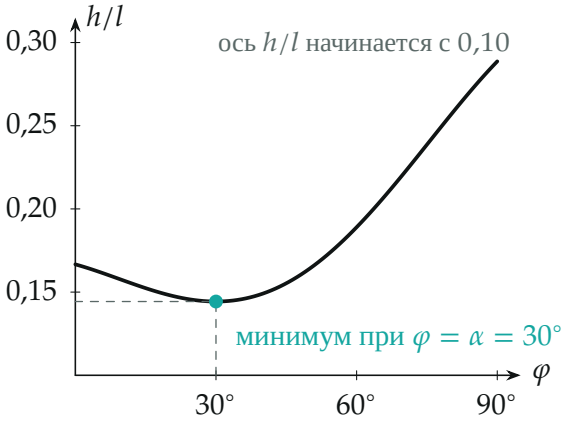


Центр тяжести O выше C на $(l/3)\sin(\alpha + \varphi)$: $CO = l/3$ *по медиане CM, угол медианы с горизонталью равен* $\varphi + \alpha$.

9. Минимум. Производная:

$$h'(\varphi) = \frac{l}{3}[\cos(\alpha+\varphi) - \cos 2\varphi] = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\varphi = 2\varphi \text{ или } \alpha+\varphi = -2\varphi.$$

Первый корень даёт $\varphi = \alpha$; второй, $\varphi = -\alpha/3$, отрицателен: вершина C ниже уступов, и угол φ острый положительный. Вторая производная $h''(\alpha) = (l/3)\sin 2\alpha > 0$ — это минимум. Тот же результат, что и в первом способе: $\varphi = \alpha$; реакции — как в пункте 6.



Высота центра тяжести над уступами как функция φ (для $\alpha = 30°$): единственный минимум при $\varphi = \alpha$.

Проверка. Размерность: N_1, N_2 — в единицах mg, φ — угол. $N_1^2 + N_2^2 = (mg)^2$ — треугольник сил $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = 0$ прямоугольный. Для $\alpha = 45°$ клин симметричен: $N_1 = N_2 = mg/\sqrt{2}$, гипотенуза горизонтальна — так и должно быть. Моменты относительно C: $\vec{N}_2$ вращает против часовой стрелки, $\vec{N}_1$ и $m\vec{g}$ — по часовой, плечи $C2 = l\cos\alpha/3$, $C1 = l\sin\alpha/3$ и $(l/3)\cos 2\alpha$; баланс: $mg\cos^2\alpha = mg\sin^2\alpha + mg\cos 2\alpha$ — верно. Уступы касаются граней в точках на трети длины граней от C ($C1 = CB/3$, $C2 = CA/3$), то есть на самих гранях, и найденное положение осуществимо. Оба способа дали $\varphi = \alpha$.

Физический смысл такой: клин «зависает» на уступах гипотенузой горизонтально, а вес делится по двум граням как по осям, перпендикулярным друг другу.

Ответ. $\varphi = \alpha$ (гипотенуза клина горизонтальна); $N_1 = mg\sin\alpha$, $N_2 = mg\cos\alpha$.