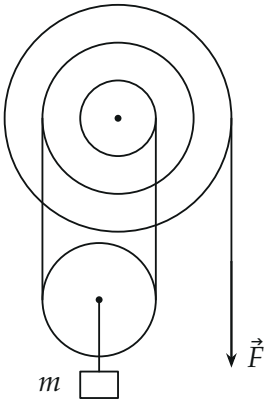
Дифференциальный блок

Задача 2. [ИОШ 2024/25, 9 класс, задача 2] Дифференциальный блок состоит из трех скрепленных блоков радиусов R, $2R$ и $3R$, насаженных на одну и ту же ось. На меньший и средний блоки в разных направлениях намотана одна и та же веревка, которая охватывает еще один блок, к оси которого прикреплен груз (см. рисунок). На самый большой блок намотана веревка, с помощью которой поднимают груз.

1. Какой выигрыш в силе обеспечивает такой блок, т.е. чему равно отношение силы F, с помощью которой можно медленно поднимать груз массой m, к силе тяжести груза?
2. Веревку какой длины нужно вытянуть, чтобы поднять груз на высоту h? Массой веревки и блока, а также трением в оси блока пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на простой механизм: правило моментов для вращающегося тела плюс «золотое правило механики». Груз висит на подвижном блоке, который держат два конца одной верёвки: один идёт на малый блок радиуса R, другой — на средний радиуса $2R$. Натяжения этих концов создают противоположные моменты, и тянущей силе F на большом блоке надо уравновесить лишь их *разность*. Отсюда большой выигрыш в силе. Расплата — проигрыш в расстоянии: за

оборот на средний блок наматывается почти столько же верёвки, сколько сматывается с малого, и петля с грузом укорачивается медленно.

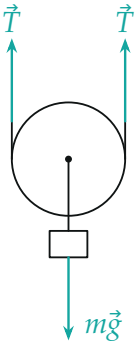
Обозначения. T — натяжение верёвки, охватывающей подвижный блок; $\Delta\varphi$ — угол поворота дифференциального блока; Δl — вытянутая длина верёвки, Δh — подъём груза.

Пункт 1.

1. Подвижный блок с грузом. При медленном подъёме ускорение равно нулю, поэтому по первому закону Ньютона для системы «подвижный блок + груз» в проекции на вертикаль: $2T - mg = 0$ (блок невесом, оба конца верёвки вертикальны), отсюда

$$T = \frac{mg}{2}.$$

Натяжение одно и то же в обоих концах, потому что верёвка одна, невесомая и блок вращается без трения.

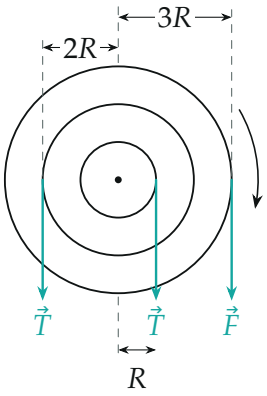


Силы на систему «подвижный блок + груз»: два конца верёвки с натяжением T и сила тяжести груза.

2. Дифференциальный блок. Тянем за верёвку на большом блоке вниз справа — блок поворачивается по часовой стрелке. Чтобы груз поднимался, при таком вращении левый конец (на среднем блоке, плечо $2R$) должен наматываться, а правый (на малом блоке, плечо R) — сматываться; так верёвка и намотана «в разных направлениях». Натяжения тянут оба конца вниз: левый крутит блок против часовой стрелки, правый и

сила F — по часовой. Блок вращается медленно (равномерно), поэтому сумма моментов сил относительно оси равна нулю; ось выбрана так, чтобы момент силы реакции оси был нулевым:

$$F \cdot 3R + T \cdot R - T \cdot 2R = 0.$$



Силы, действующие на дифференциальный блок, и их плечи относительно оси блока. Стрелка справа — направление вращения при подъёме груза (по часовой стрелке).

3. Выигрыш в силе. Подставим $T = mg/2$:

$$3FR = \frac{mg}{2}(2R - R) = \frac{mgR}{2} \;\Rightarrow\; F = \frac{mg}{6}, \qquad \frac{F}{mg} = \frac{1}{6}.$$

Механизм даёт выигрыш в силе в шесть раз.

Пункт 2.

4. Длина верёвки. Пусть сила F вытянула кусок верёвки Δl. Он смотался с большого блока, поэтому блок повернулся на угол $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta l}{3R}$. За тот же поворот на средний блок намоталось $2R\,\Delta\varphi$ верёвки, а с малого смоталось $R\,\Delta\varphi$. Петля, охватывающая подвижный блок, укоротилась на разность

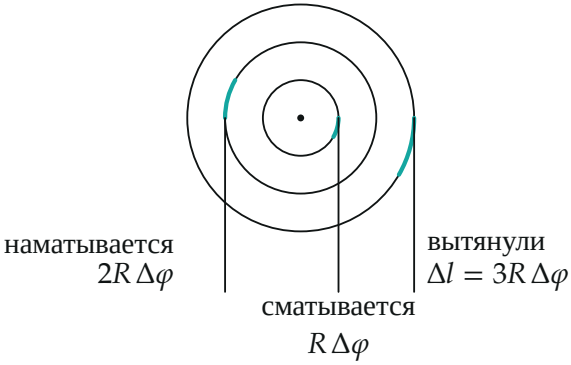
$$2R\,\Delta\varphi - R\,\Delta\varphi = R\,\Delta\varphi.$$

Укорочение петли делится поровну между двумя её вертикальными ветвями, поэтому подвижный блок с грузом поднимается вдвое меньше:

$$\Delta h = \frac{R\,\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta l}{6}.$$

Это верно для любого малого поворота, поэтому, суммируя по всему подъёму от начала до конца, получаем: чтобы поднять груз на высоту h, надо вытянуть

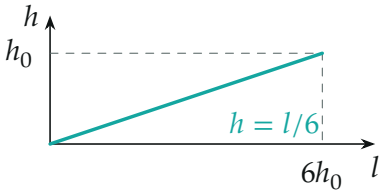
$$l = 6h.$$



Поворот блока на малый угол $\Delta\varphi$: дуги, по которым верёвка наматывается и сматывается, выделены.

Обратите внимание: петлю укорачивает не намотка на средний блок, а *разность* намотки и смотки, и подвижный блок поднимается ещё вдвое меньше, чем укорачивается петля.

Проверка. Золотое правило механики: при медленном подъёме без трения работа силы F равна работе против силы тяжести, $F\,l = mgh$, и $\dfrac{mg}{6} \cdot 6h = mgh$ — верно, пункты согласованы. Предел: если бы оба конца петли шли на блоки одного радиуса, разность моментов была бы нулевой, $F = 0$, но и груз бы не поднимался ($\Delta h = 0$) — петля просто перематывалась бы с блока на блок.



Высота подъёма груза пропорциональна вытянутой длине верёвки: $h = l/6$.

Физический смысл такой: разность радиусов малого и среднего блоков делает петлю короче очень медленно, и именно эта медленность даёт выигрыш в силе.

Ответ. 1) $F/(mg) = 1/6$, выигрыш в силе в 6 раз; 2) $l = 6h$.