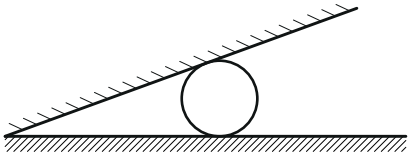
Колечко между стенками при нагреве

Задача 3. [ИОШ 2024/25, 9 класс, задача 3] Для обеспечения малых перемещений в тех или иных устройствах используют тепловое расширение. В одной из таких конструкций в зазор между двумя стенками, образующими малый и не меняющийся угол, вставляют стальное колечко. При нагревании размеры колечка увеличиваются благодаря тепловому расширению, и оно сдвигается. На каком расстоянии от вершины угла будет находиться центр колечка при повышении его температуры на $\Delta T = 10$ °C, если при начальной температуре он находился на расстоянии $l_0 = 10$ см от вершины? Коэффициент линейного теплового расширения стали $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}.



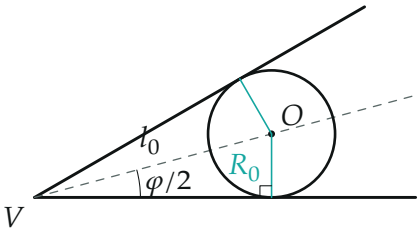
▲ **Решение. Что происходит.** Колечко зажато между двумя стенками и касается обеих. При нагреве все его размеры растут в одно и то же число раз $1 + \alpha\Delta T$. Касаться обеих стенок колечко большего радиуса может только дальше от вершины — там зазор шире, поэтому оно выдвигается из угла. Главная идея: положение центра определяется только радиусом колечка и углом, причём расстояние до вершины *пропорционально* радиусу. Значит, расстояние до вершины тоже вырастет в $1 + \alpha\Delta T$ раз — картина просто подобно растягивается из вершины угла.

Обозначения. φ — угол между стенками (он не меняется); R_0 и R — радиус колечка до и после нагрева; l_0 и l — расстояние от вершины угла до центра колечка до и после нагрева.

1. Где центр колечка. Колечко касается обеих стенок, а радиусы, проведённые в точки касания, перпендикулярны стенкам. Значит, центр равноудалён от стенок и лежит на биссектрисе угла. В прямоугольном треугольнике «вершина — центр — точка касания» катет R_0 лежит про-

тив угла $\varphi/2$, поэтому

$$R_0 = l_0 \sin\frac{\varphi}{2} \;\Rightarrow\; l_0 = \frac{R_0}{\sin(\varphi/2)}.$$



Центр колечка O лежит на биссектрисе угла (пунктир); радиусы в точки касания перпендикулярны стенкам. Угол на рисунке увеличен для наглядности.

2. Нагрев колечка. Длина колечка $2\pi R$ при нагреве на ΔT растёт по закону линейного теплового расширения $2\pi R = 2\pi R_0(1+\alpha\Delta T)$. Разделив на 2π, получаем такой же закон для радиуса:

$$R = R_0\,(1+\alpha\,\Delta T).$$

Формула линейного расширения верна, пока $\alpha\Delta T \ll 1$; здесь $\alpha\Delta T = 1{,}1\cdot 10^{-4}$.

3. Новое положение центра. Угол стенок не меняется, а колечко по-прежнему касается обеих стенок, поэтому формула пункта 1 верна и после нагрева. Разделим её «после» на «до»:

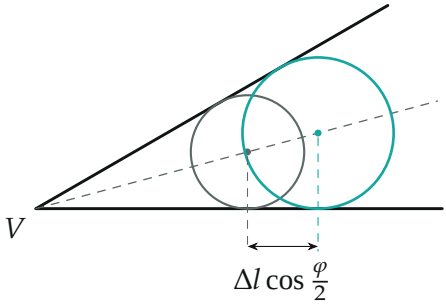
$$\frac{l}{l_0} = \frac{R/\sin(\varphi/2)}{R_0/\sin(\varphi/2)} = \frac{R}{R_0} = 1+\alpha\,\Delta T,$$

$$l = l_0\,(1+\alpha\,\Delta T) = 10\text{ см}\cdot(1+11\cdot 10^{-6}\cdot 10) = 10{,}0011\text{ см}.$$

Центр сместился от вершины на

$$\Delta l = l - l_0 = \alpha\, l_0\,\Delta T = 11\cdot 10^{-6}\,\text{К}^{-1}\cdot 0{,}1\text{ м}\cdot 10\text{ К} = 1{,}1\cdot 10^{-5}\text{ м} = 0{,}011\text{ мм}.$$

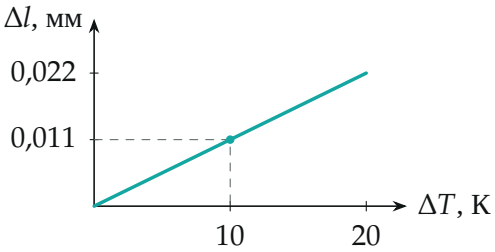
Знак плюс: колечко выдвигается из угла, удаляясь от вершины.



До нагрева (серое) и после (бирюзовое): колечко подобно растягивается из вершины угла, его центр уходит по биссектрисе. Изменение размера сильно преувеличено; под рисунком — проекция сдвига центра на нижнюю стенку.

Обратите внимание: смещение Δl не зависит от угла φ — угол сократился при делении. Он важен лишь в том, что колечко одновременно касается обеих стенок; знать его величину не нужно.

Проверка. Размерность: $[\alpha\, l_0\, \Delta T] = \text{К}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{К} = \text{м}$. Второй способ — подобие: тепловое расширение растягивает колечко во всех направлениях одинаково, и вся картина «угол + колечко» после нагрева подобна прежней с коэффициентом $1 + \alpha\Delta T$ и центром подобия в вершине (угол при подобии не меняется). Все расстояния от вершины, в том числе до центра колечка, умножаются на этот коэффициент — тот же ответ. Предел: при $\Delta T = 0$ сдвига нет; при охлаждении ($\Delta T < 0$) колечко втягивается в угол.



Смещение центра колечка линейно растёт с нагревом: $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$; точка — условие задачи.

Физический смысл такой: колечко — это «микрометрический винт» без резьбы: десять градусов нагрева сдвигают его всего на одиннадцать

микрометров, поэтому таким способом и получают очень малые управляемые перемещения.

Ответ. $l = l_0(1 + \alpha\Delta T) \approx 10{,}0011$ см: центр колечка удалится от вершины на $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T = 0{,}011$ мм.