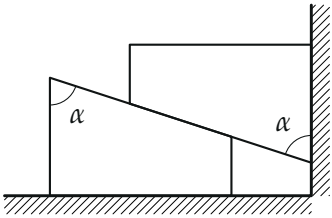
Две призмы у стены

Задача 6. [ИОШ 2024/25, 9 класс, задача 6] Два одинаковых призмы, в сечении которых лежит прямоугольная трапеция с острым углом α, лежат друг на друге на горизонтальном полу около вертикальной стены так, как показано на рисунке. Коэффициенты трения μ призм об пол и стену одинаковы, наклонные грани призм абсолютно гладкие. Каким должен быть коэффициент трения μ, чтобы призмы находились в покое?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие системы тел с трением покоя. Верхняя призма лежит на гладкой наклонной грани нижней и прижата к стене: гладкая грань давит на неё по нормали, вверх и к стене. Вертикальная составляющая этого давления удерживает верхнюю призму не полностью, остальное держит трение о стену. Горизонтальная составляющая прижимает верхнюю призму к стене, а нижнюю (по третьему закону Ньютона) отталкивает от стены — её удерживает трение о пол. Главная идея: сила давления призм друг на друга N входит в оба условия трения, но в противоположные стороны: большое N хорошо для верхней призмы (больше прижатие к стене) и плохо для нижней (сильнее выталкивание). Покой возможен, если найдётся N, устраивающее обе призмы сразу.

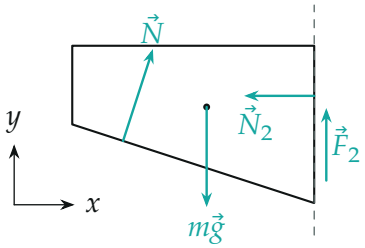
Обозначения. m — масса каждой призмы; N — сила давления призм друг на друга по нормали к гладким граням; N_1 и F_1 — нормальная реакция и сила трения пола (на нижнюю призму); N_2 и F_2 — нормальная реакция и сила трения стены (на верхнюю призму). Ось x — горизонтально к стене, ось y — вверх.

1. Направление силы N**.** Наклонная грань составляет с вертикальной гранью трапеции угол α, значит, с горизонтом — угол $90^\circ - \alpha$. Нормаль к грани наклонена к вертикали на тот же угол $90^\circ - \alpha$. Поэтому

у силы N горизонтальная составляющая $N\sin(90^\circ-\alpha)=N\cos\alpha$, вертикальная — $N\cos(90^\circ-\alpha)=N\sin\alpha$. На верхнюю призму сила $\vec{N}$ направлена вверх и к стене, на нижнюю — вниз и от стены.

2. Верхняя призма. Она касается стены, но не пола (см. рисунок условия). По первому закону Ньютона $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{N}_2+\vec{F}_2=0$; трение стены направлено вверх — без него верхняя призма соскользнула бы вниз. В проекциях:

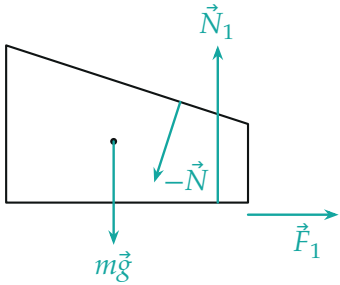
$$\begin{aligned} x:&\quad N\cos\alpha-N_2=0\ \Rightarrow\ N_2=N\cos\alpha,\\ y:&\quad N\sin\alpha+F_2-mg=0\ \Rightarrow\ F_2=mg-N\sin\alpha. \end{aligned}$$



Силы, действующие на верхнюю призму: тяжесть, давление гладкой грани $\vec{N}$ по нормали, реакция стены $\vec{N}_2$ и трение о стену $\vec{F}_2$ (вверх).

3. Нижняя призма. Она касается пола, но не стены. По третьему закону Ньютона верхняя призма давит на неё с силой $\vec{N}$, направленной вниз и от стены. Трение пола направлено к стене. Первый закон Ньютона $m\vec{g}-\vec{N}+\vec{N}_1+\vec{F}_1=0$ в проекциях:

$$\begin{aligned} x:&\quad F_1-N\cos\alpha=0\ \Rightarrow\ F_1=N\cos\alpha,\\ y:&\quad N_1-mg-N\sin\alpha=0\ \Rightarrow\ N_1=mg+N\sin\alpha. \end{aligned}$$



Силы, действующие на нижнюю призму: тяжесть, давление верхней призмы $-\vec{N}$, реакция пола $\vec{N}_1$ и трение о пол $\vec{F}_1$ (к стене).

4. Условия трения покоя. Уравнений четыре, а неизвестных пять: N, N_1, N_2, F_1, F_2. Одних законов Ньютона не хватает, чтобы найти N (такие системы называют статически неопределимыми). Но покой требует, чтобы обе силы трения покоя не превышали своих максимальных значений:

$$F_2 \le \mu N_2: \quad mg - N\sin\alpha \le \mu N\cos\alpha \;\Rightarrow\; N \ge \frac{mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha};$$

$$F_1 \le \mu N_1: \quad N\cos\alpha \le \mu\,(mg + N\sin\alpha) \;\Rightarrow\; N\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \le \mu mg.$$

Первое неравенство ограничивает N снизу (верхнюю призму надо прижать к стене достаточно сильно), второе — сверху (нижнюю нельзя выталкивать слишком сильно). Покой возможен, если нижняя граница не выше верхней. При $\mu \ge \operatorname{ctg}\alpha$ второе неравенство верно при любом N; иначе условие

$$\frac{mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \le \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

после умножения на положительные знаменатели даёт

$$\cos\alpha - \mu\sin\alpha \le \mu\sin\alpha + \mu^2\cos\alpha, \qquad \mu^2\cos\alpha + 2\mu\sin\alpha - \cos\alpha \ge 0.$$

5. Решаем неравенство. Корни квадратного трёхчлена $\mu_{1,2} =$

$\dfrac{-\sin\alpha \pm 1}{\cos\alpha}$; положительный из них

$$\mu_0 = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\Big(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\Big).$$

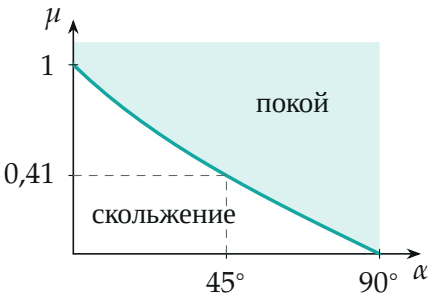
Трёхчлен с положительным старшим коэффициентом неотрицателен вне корней, а $\mu > 0$, поэтому призмы могут покоиться при

$$\mu \geq \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

При $\mu = \mu_0$ обе силы трения одновременно достигают максимума — это граница между покоем и скольжением. Отметим, что $\mu_0 < \operatorname{ctg}\alpha$ всегда (после умножения на $\sin\alpha\cos\alpha$ это неравенство сводится к $\sin\alpha < 1$), так что случай $\mu \geq \operatorname{ctg}\alpha$ в ответ уже входит.

У организаторов в ответе знак «<»: $\mu < (1-\sin\alpha)/\cos\alpha$ — это опечатка, ведь при $\mu = 0$ верхняя призма соскальзывает, и чем больше трение, тем легче удержать призмы в покое.

Проверка. Размерность: μ безразмерен, ответ — отношение безразмерных величин. Пределы: $\alpha \to 90^\circ$ — грани горизонтальны, верхняя призма просто лежит на нижней, трение не нужно: $\mu_0 \to 0$; $\alpha \to 0$ — грани почти вертикальны, верхнюю призму держит только трение о стену, и надо $\mu_0 \to 1$. Численно (python) для $\alpha = 20^\circ, 45^\circ, 72^\circ$: при $\mu = 0{,}99\mu_0$ подходящего N нет, при $\mu = 1{,}01\mu_0$ — есть.



Граница $\mu_0(\alpha) = (1-\sin\alpha)/\cos\alpha$ (по точкам); покой возможен выше кривой.

Физический смысл такой: гладкая наклонная грань — «клин», который одновременно прижимает верхнюю призму к стене и выталкивает нижнюю; чем круче грань (меньше α), тем слабее вертикальная поддержка и тем больше нужно трения.

Ответ. Призмы могут покоиться при $\mu \geq \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.