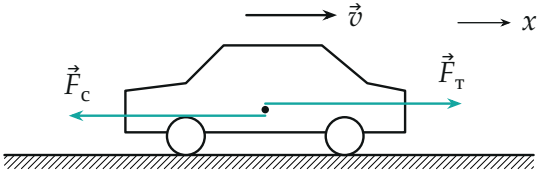
Мощность автомобиля при другой скорости

Задача 2. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 2] Расход бензина автомобиля составляет $\Delta m = 80$ г на $\Delta s = 1$ км пути при его скорости $v_1 = 72$ км/ч. Считая, что сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна квадрату его скорости, найдите, какую мощность должен развивать двигатель при скорости $v_2 = 108$ км/ч. Коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30$ %, удельная теплота сгорания бензина $q = 44 \cdot 10^6$ Дж/кг.



Поясняющий рисунок. При движении с постоянной скоростью сила тяги $\vec{F}_m$ уравновешивает силу сопротивления $\vec{F}_c$ (вертикальные силы не показаны).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на мощность и закон сохранения энергии с КПД. По расходу бензина при скорости v_1 узнаём, какую работу двигатель совершает на одном километре, — это работа против силы сопротивления. Отсюда получаем силу сопротивления при v_1 и коэффициент в законе $F_\text{с} = kv^2$. Коэффициент от скорости не зависит, поэтому при v_2 сила сопротивления и мощность находятся сразу.

Обозначения. $F_\text{с} = kv^2$ — сила сопротивления, k — её коэффициент; $F_\text{т}$ — сила тяги; P — полезная (механическая) мощность двигателя при скорости v_2. Скорости в СИ: $v_1 = 72$ км/ч $= 20$ м/с, $v_2 = 108$ км/ч $= 30$ м/с; $\Delta s = 1000$ м, $\Delta m = 0{,}08$ кг. Под «мощностью двигателя» понимаем полезную мощность, $P = F_\text{т} v$, как и организаторы.

1. Сила тяги при постоянной скорости. Скорость постоянна, значит, по второму закону Ньютона в проекции на ось x (вдоль движения, рис. условия)

$$F_\text{т} - F_\text{с} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_\text{т} = F_\text{с} = kv^2.$$

2. Энергия бензина на километре при v_1. При сгорании Δm бензина выделяется $q\,\Delta m$; двигатель превращает в механическую работу долю η:

$$A = \eta\, q\, \Delta m = 0{,}3 \cdot 44 \cdot 10^6 \cdot 0{,}08 \text{ Дж} = 1{,}056 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Эта работа — работа силы тяги на пути Δs: $A = F_т \Delta s = k v_1^2 \Delta s$ (рис. 1).

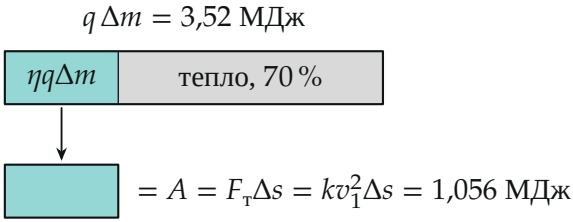


Рис. 1. Энергия бензина на одном километре при v_1: в работу силы тяги идёт доля $\eta = 30\,\%$, остальное уходит теплом (ширины полос — в масштабе).

3. Коэффициент сопротивления. Приравниваем:

$$k v_1^2 \Delta s = \eta\, q\, \Delta m \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\eta\, q\, \Delta m}{v_1^2\, \Delta s},$$

$$k = \frac{1{,}056 \cdot 10^6}{20^2 \cdot 1000} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = 2{,}64 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2}.$$

Сила сопротивления при v_1: $F_{с1} = k v_1^2 = 1056$ Н; при v_2 она в $(v_2/v_1)^2 = 2{,}25$ раза больше: $F_{с2} = k v_2^2 = 2376$ Н (рис. 2).

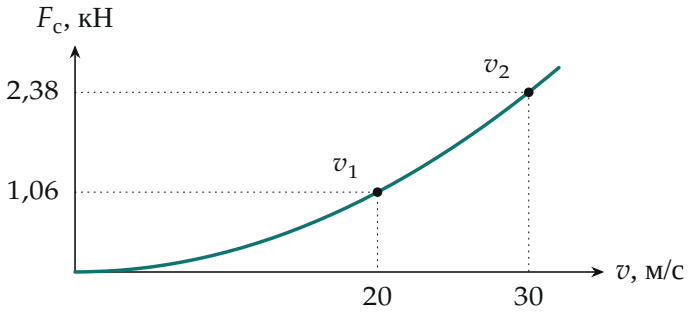


Рис. 2. Сила сопротивления $F_c = kv^2$ при $k = 2{,}64$ Н·с^2/м^2 (python, шаг 2 м/с). Точки — скорости v_1 и v_2.

4. Мощность при v_2. Мощность силы тяги при постоянной скорости

$$P = F_т v_2 = k v_2^2 \cdot v_2 = k v_2^3 = \frac{\eta\, q\, \Delta m}{\Delta s} \cdot \frac{v_2^3}{v_1^2}.$$

Подставляем:

$$P = \frac{1{,}056 \cdot 10^6 \text{ Дж}}{1000 \text{ м}} \cdot \frac{(30 \text{ м/с})^3}{(20 \text{ м/с})^2} = 1056 \text{ Н} \cdot 67{,}5 \text{ м/с},$$

$$P \approx 7{,}13 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 71{,}3 \text{ кВт}.$$

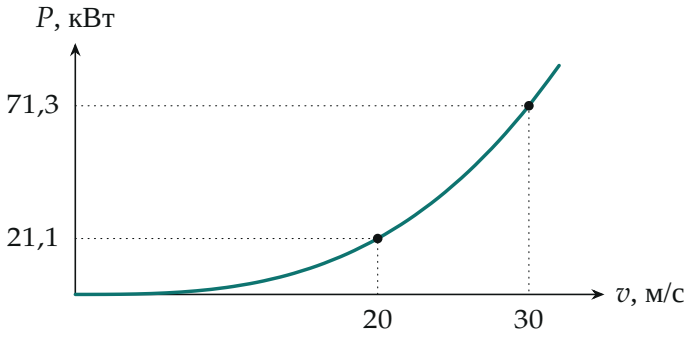


Рис. 3. Нужная мощность $P = kv^3$ (python, шаг 2 м/с): при $v_1 = 20$ м/с — 21,1 кВт, при $v_2 = 30$ м/с — 71,3 кВт. Скорость выросла в 1,5 раза, мощность — в $1{,}5^3 \approx 3{,}4$ раза.

Обратите внимание. Мощность растёт как куб скорости, а не как квадрат: квадрат даёт сила, ещё одну степень — то, что быстрее проходится путь. И КПД стоит в формуле один раз — при пересчёте энергии бензина в работу; к ответу он больше не применяется, потому что спрашивается мощность, которую развивает двигатель (полезная).

Ответ. $P = \dfrac{\eta\, q\, \Delta m\, v_2^3}{\Delta s\, v_1^2} \approx 71{,}3$ кВт.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж}}{\text{м}} \cdot \dfrac{\text{м}^3/\text{с}^3}{\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \dfrac{\text{м}}{\text{с}} = \text{Вт}$. Второй способ — через мощность при v_1: $P_1 = \dfrac{A}{\Delta s / v_1} = \dfrac{1{,}056 \cdot 10^6\ \text{Дж}}{50\ \text{с}} = 21{,}1\ \text{кВт}$, и $P = P_1 \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^3 = 21{,}1 \cdot 3{,}375 \approx 71{,}3\ \text{кВт}$. Оценка: 70 кВт ($\approx$ 95 л.с.) на 108 км/ч — правдоподобно для легкового автомобиля.

Физический смысл. На высокой скорости почти вся мощность уходит на сопротивление воздуха, и она растёт как v^3: прибавка скорости в полтора раза требует втрое с лишним большей мощности.

Ответ. $P = \dfrac{\eta\, q\, \Delta m\, v_2^3}{\Delta s\, v_1^2} \approx 71{,}3\ \text{кВт}$.