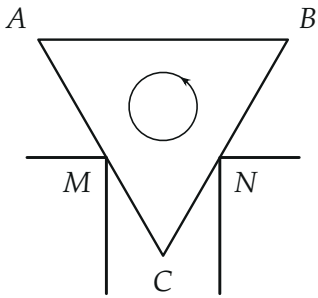
Треугольник скользит по опорам

Задача 5. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Вырезанный из листа фанеры равносторонний треугольник ABC движется в своей плоскости так, что его боковые стороны скользят по опорам M и N (см. рисунок). Угловая скорость треугольника постоянна и равна ω. Найти скорость и ускорение точки C в тот момент времени, когда сторона треугольника AB горизонтальна. В этот момент $CM = CN$, $MN = a$.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику плоского движения твёрдого тела. Скорость найдём через мгновенный центр скоростей: опоры неподвижны, а точка треугольника, проходящая над опорой, скользит вдоль стороны — это задаёт направления скоростей двух точек. С ускорением есть ловушка: мгновенный центр скоростей сам движется, и ускорение точки C не сводится к $\omega^2 \cdot OC$. Поэтому ускорение найдём по траектории точки C: угол треугольника при C постоянен и опирается на неподвижный отрезок MN — точка C идёт по окружности.

Обозначения. O — мгновенный центр скоростей треугольника; Q и R — центр и радиус траектории точки C; θ — угол поворота треугольника от положения «AB горизонтальна»; вращение — против часовой стрелки, как на рисунке условия.

1. Мгновенный центр скоростей. Сторона AC скользит по неподвижной опоре M, поэтому точка треугольника, находящаяся в данный момент над M, движется вдоль AC. Скорость точки тела перпендикулярна отрезку, соединяющему её с мгновенным центром, — значит, O

лежит на перпендикуляре к AC, восставленном в точке M. Так же O лежит на перпендикуляре к BC в точке N. В рассматриваемый момент картина симметрична, и перпендикуляры пересекаются на вертикали через C (рис. 1).

2. Геометрия. В треугольнике CMN стороны $CM = CN$, а угол при C равен 60° (угол равностороннего треугольника) — значит, CMN равносторонний: $CM = CN = MN = a$. Вертикаль CO делит угол C пополам: $\angle OCM = 30^\circ$. Треугольник OMC прямоугольный (угол при M прямой), поэтому

$$OC = \frac{CM}{\cos 30^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \qquad OM = CM \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Точка O лежит выше отрезка MN на $OC - \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

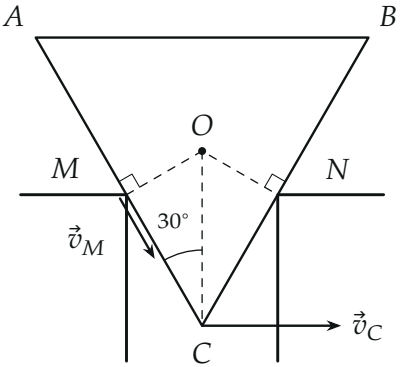


Рис. 1. Мгновенный центр скоростей O — пересечение перпендикуляров к сторонам в точках опоры. Скорости перпендикулярны отрезкам OC и OM; длины стрелок пропорциональны модулям ($v_C = 2v_M$).

3. Скорость точки C. Треугольник в данный момент поворачивается вокруг O с угловой скоростью ω, поэтому скорость любой его точки равна ω, умноженной на расстояние до O, и перпендикулярна этому расстоянию:

$$v_C = \omega \cdot OC = \frac{2a\omega}{\sqrt{3}},$$

направлена горизонтально (перпендикулярно вертикали OC), при вращении против часовой стрелки — вправо. Точка треугольника над опорой: $v_M = \omega \cdot OM = \dfrac{a\omega}{\sqrt{3}}$, вдоль стороны AC.

Проверка по теореме о проекциях скоростей двух точек твёрдого тела на соединяющую их прямую (стержень CM не растягивается): $v_C \cos 60^\circ = v_M \cos 0^\circ$, то есть $\dfrac{2a\omega}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\omega}{\sqrt{3}}$ — верно.

4. Траектория точки C. Угол MCN — угол треугольника, он всегда 60°, а точки M и N неподвижны. Множество точек, из которых отрезок MN виден под постоянным углом, — дуга окружности (теорема о вписанном угле). Значит, C движется по окружности, проходящей через M и N. Её радиус по теореме синусов для треугольника MCN:

$$R = \frac{MN}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Центр Q — на вертикали через C, на расстоянии R выше C, то есть на $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ ниже отрезка MN (рис. 2).

5. Угловая скорость точки C на окружности. Центральный угол $\angle MQC$ вдвое больше вписанного угла $\angle MNC$, опирающегося на ту же дугу MC. А угол $\angle MNC$ — это угол между неподвижной прямой NM и стороной NC треугольника; при повороте треугольника на θ он меняется на θ. Значит, радиус QC поворачивается на 2θ (рис. 2): точка C обходит окружность с угловой скоростью 2ω — постоянной, так как ω постоянна. Её скорость $v_C = 2\omega R = \dfrac{2a\omega}{\sqrt{3}}$ — совпало с шагом 3.

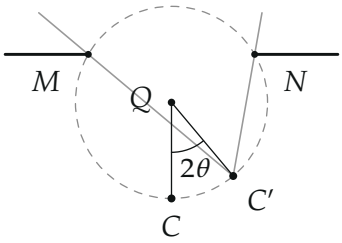


Рис. 2. Траектория точки C — окружность через M и N с центром Q (пунктир). Серым — стороны треугольника, повёрнутого на $\theta = 20°$ (по точкам, python): вершина C' на той же окружности, радиус QC повернулся на 2θ.

6. Ускорение точки C. Точка C движется по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью — её ускорение центростремительное, направлено к центру Q, то есть вертикально вверх (рис. 3):

$$a_C = \frac{v_C^2}{R} = (2\omega)^2 R = \frac{4a\omega^2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31\, a\omega^2.$$

Касательного ускорения нет — модуль скорости $2\omega R$ не меняется во всё время движения.

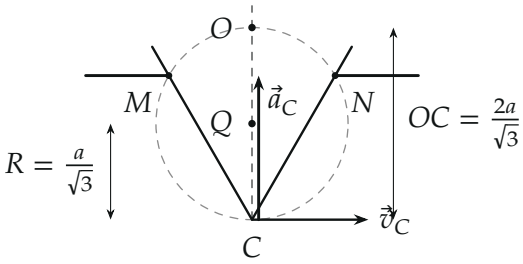


Рис. 3. Ускорение $\vec{a}_C$ направлено к центру траектории Q (вверх). Радиус кривизны траектории — $R = QC$, а не OC: мгновенный центр скоростей O вдвое дальше от C.

Обратите внимание. Мгновенный центр скоростей — не центр ускорений. Формула $a = \omega^2 \cdot OC$ верна, только если точка тела, совпадающая с O, не имеет ускорения; здесь это не так: опоры заставляют треугольник одновременно поворачиваться и смещаться, и его точка в O ускоряется вверх с ускорением $a_C - \omega^2 \cdot OC = \frac{2a\omega^2}{\sqrt{3}}$. У организаторов в ответе именно $a_C = \omega^2 \cdot OC = \frac{2a\omega^2}{\sqrt{3}}$ — вдвое меньше верного; направление (вверх, без касательной составляющей) у них правильное.

Ответ. $v_C = \dfrac{2a\omega}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15\, a\omega$, горизонтально; $a_C = \dfrac{4a\omega^2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31\, a\omega^2$, вертикально вверх (к центру траектории, касательного ускорения нет).

Проверка. Размерность: $[a\omega] = \text{м/с}$, $[a\omega^2] = \text{м/с}^2$. Скорость получена двумя способами (мгновенный центр, шаг 3; движение по окружности, шаг 5). Ускорение — численно (python): положение C при повороте на θ найдено как пересечение сторон, проходящих через M и N; вторая разность по времени при $a = \omega = 1$ даёт $|\vec{a}_C| = 2{,}3094 = 4/\sqrt{3}$, направление — вертикально вверх.

Физический смысл. Вершина треугольника «катается» по дуге, на которую отрезок MN виден под углом $60°$, и обегает её вдвое быстрее, чем поворачивается сам треугольник, — отсюда центростремительное ускорение $(2\omega)^2 R$.

Ответ. $v_C = \dfrac{2a\omega}{\sqrt{3}}$, горизонтально; $a_C = \dfrac{4a\omega^2}{\sqrt{3}}$, вертикально вверх (центростремительное, к центру траектории точки C).