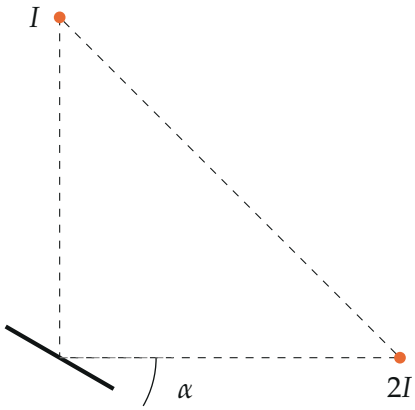
Освещённость от двух источников

Задача 4. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 4] В вершинах острых углов прямоугольного равнобедренного треугольника расположены источники света с интенсивностью I и $2I$ (см. рисунок). Под каким углом α к катету, направленному к более интенсивному источнику, нужно расположить маленькую пластинку в вершине прямого угла, чтобы её освещённость была максимальна? Чему равна эта освещённость, если катеты треугольника равны a? Интенсивностью источника света называется световая энергия, излучаемая источником в единицу времени. Освещённостью площадки называется световая энергия, падающая на единицу площади площадки в единицу времени.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Пластинку освещают два источника, и освещённости от них складываются. Каждый вклад зависит от наклона пластинки: свет, падающий перпендикулярно, даёт наибольшую освещённость, наклонный — меньшую (закон косинуса). Получаем функцию угла α и ищем её максимум. Это задача на экстремум; ответ можно получить и без производной, сложив «векторы освещённости».

Обозначения. O — вершина прямого угла, где стоит пластинка. Ось x — вдоль катета к источнику $2I$, ось y — вдоль катета к источнику I. $\vec{n}$ — единичная нормаль к пластинке со стороны источников. $E_0 = \dfrac{I}{4\pi a^2}$.

Источники точечные и излучают одинаково во все стороны, пластинка маленькая (размер много меньше a), свет нигде не поглощается.

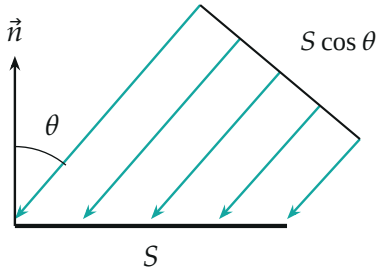
1. Поток энергии от одного источника. Закон сохранения энергии: энергия, излучённая источником интенсивности I, нигде не накапливается, поэтому через сферу любого радиуса за единицу времени проходит та же энергия I. Сфера радиуса a имеет площадь $4\pi a^2$, и через единицу площади, перпендикулярной лучам, проходит

$$w_1 = \frac{I}{4\pi a^2} = E_0, \qquad w_2 = \frac{2I}{4\pi a^2} = 2E_0$$

(оба источника на одном расстоянии a от O).

2. Закон косинуса. Пусть пучок параллельных лучей падает на площадку S, и нормаль к ней составляет угол θ с лучами. На площадку попадает только та энергия, которая проходит через её проекцию на плоскость, перпендикулярную лучам, площадью $S\cos\theta$. Поэтому освещённость

$$E = \frac{w\,S\cos\theta}{S} = w\cos\theta.$$



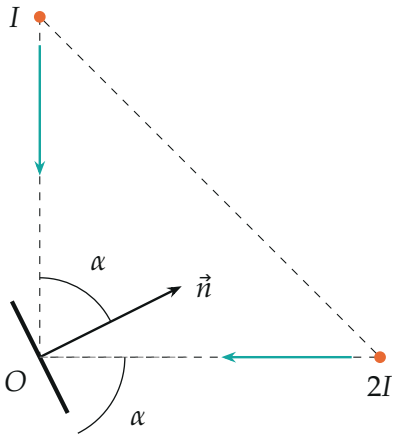
Закон косинуса: на наклонную площадку S падает свет, прошедший через сечение пучка $S\cos\theta$.

3. Освещённость при наклоне α. Пластинка составляет угол α с осью x, поэтому её нормаль $\vec{n}$ составляет угол α с осью y: $\vec{n} = (\sin\alpha;\ \cos\alpha)$. Свет от I идёт вдоль оси y, угол между лучами и нормалью α; свет от $2I$ идёт вдоль оси x, угол между лучами и нормалью $90^\circ - \alpha$. Закон косинуса для каждого источника и сложение

вкладов:

$$E(\alpha) = w_1 \cos\alpha + w_2 \cos(90^\circ - \alpha) = E_0\,(\cos\alpha + 2\sin\alpha), \qquad 0 \le \alpha \le 90^\circ.$$

При таких α обе освещаемые стороны — одна и та же сторона пластинки, оба вклада положительны.



Пластинка в O под углом α к катету на 2I (показан найденный угол 63,4°). Нормаль $\vec{n}$ составляет угол α с лучами от I и $90^\circ - \alpha$ с лучами от 2I.

4. Максимум. Производная по углу:

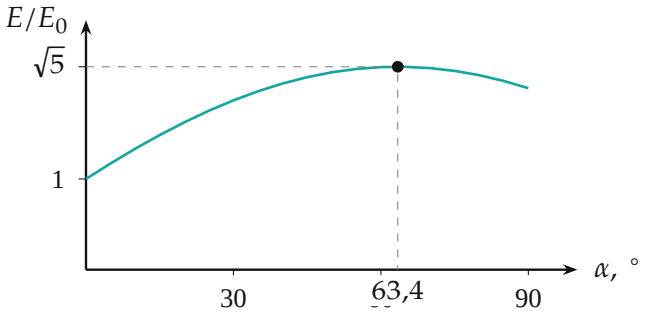
$$E'(\alpha) = E_0\,(-\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha_m = 2, \;\; \alpha_m \approx 63{,}4^\circ.$$

Это максимум: при $\alpha < \alpha_m$ производная положительна ($\operatorname{tg}\alpha < 2$), при $\alpha > \alpha_m$ — отрицательна. Значение: $\sin\alpha_m = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_m}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_m}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha_m = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$$E_m = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\,E_0 = \frac{\sqrt{5}\,I}{4\pi a^2}.$$

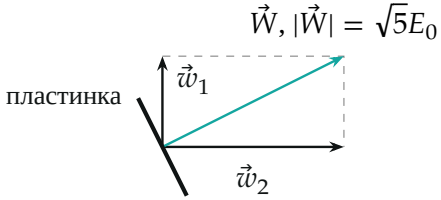
Сравнение с краями: $E(0) = E_0$ (пластинка лицом к I), $E(90^\circ) = 2E_0$

(лицом к $2I$); оба меньше $\sqrt{5}E_0 \approx 2{,}24E_0$.



Освещённость $E/E_0 = \cos\alpha + 2\sin\alpha$ по точкам через 5°; максимум $\sqrt{5}$ при $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}4°$.

5. Второй способ: вектор освещённости. Освещённость от одного источника равна $w\cos\theta = \vec{w}\cdot\vec{n}$, где $\vec{w}$ — вектор длины w, направленный на источник. Сумма: $E = (\vec{w}_1+\vec{w}_2)\cdot\vec{n} = \vec{W}\cdot\vec{n}$, $\vec{W} = E_0\,(2;\,1)$. Скалярное произведение на единичный вектор наибольшее, когда $\vec{n} \parallel \vec{W}$, и равно $|\vec{W}| = E_0\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}E_0$. Нормаль отклонена от оси y на угол с $\operatorname{tg}\alpha = 2/1$ — то же $\alpha_m = \operatorname{arctg} 2$.



Векторы освещённости в масштабе ($|\vec{w}_2| = 2|\vec{w}_1|$): пластинка ставится перпендикулярно их сумме $\vec{W}$.

Обратите внимание: угол в ответе отсчитывается от катета, направленного на $2I$: $\operatorname{tg}\alpha_m = 2$, $\alpha_m \approx 63{,}4°$. Нормаль пластинки при этом наклонена к катету на $2I$ под углом 26,6° — пластинка «смотрит» в основном на более яркий источник, как и должно быть.

Проверка. Размерность: Вт/м^2 — энергия на единицу площади в единицу времени. Предел: если бы второй источник был той же интенсивности I, вышло бы $\operatorname{tg}\alpha_m = 1$, $\alpha_m = 45^\circ$ — по симметрии верно. Оба способа дают $\sqrt{5}E_0$.

Смысл: освещённости от нескольких точечных источников складываются как проекции векторов на нормаль; наибольшая освещённость — модуль суммарного вектора.

Ответ. $\alpha_m = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}4^\circ$; $E_m = \dfrac{\sqrt{5}\,I}{4\pi a^2}$.