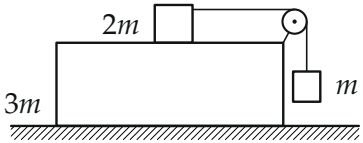
Тело на столе с блоком и грузами

Задача 5. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 5] Тело массой $3m$ расположено на шероховатой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ_2. На ребре тела укреплён невесомый блок. Через блок переброшена нить, концы которой прикреплены к телам m и $2m$ (см. рисунок). Коэффициент трения между большим и верхним телом равен μ_1. При каких значениях коэффициентов трения μ_1 и μ_2 большое тело будет неподвижным?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на трение покоя в системе связанных тел. Большое тело тянут вбок две силы: нить через блок (влево, к верхнему грузу) и трение со стороны верхнего груза. Удерживает его трение покоя о стол. Сначала выясним, движутся ли грузы: если верхний груз стоит, то и нить, и трение на большое тело уравновешивают друг друга, и стол не нужен. Если грузы едут, натяжение нити меньше mg, трение на большое тело — трение скольжения, и надо сравнить их разность с максимальным трением покоя о стол.

Обозначения. T — сила натяжения нити; a — модуль ускорения грузов; N_1 — сила нормальной реакции между верхним грузом и большим телом; F_1 — сила трения между ними; N_2 и F_2 — сила нормальной реакции и сила трения покоя со стороны стола на большое тело. Ось x — вправо, к блоку, ось y — вверх (рис. 1, 2). Большое тело считаем неподвижным и проверяем, при каких μ_1, μ_2 это возможно.

1. Может ли верхний груз стоять. Если грузы покоятся, второй закон Ньютона для висящего груза m в проекции на y даёт $T - mg = 0$, то есть $T = mg$. Для груза $2m$ в проекции на x: $T - F_1 = 0$, нужна сила трения покоя $F_1 = mg$. Трение покоя не больше $\mu_1 N_1 = \mu_1 \cdot 2mg$, поэтому

грузы стоят, если

$$mg \le 2\mu_1 mg \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \ge \frac{1}{2}.$$

Тогда на большое тело по горизонтали действуют нить через блок ($T = mg$ влево) и трение от груза ($F_1 = mg$ вправо, по третьему закону Ньютона): они компенсируют друг друга, и большое тело стоит при любом μ_2.

2. Грузы едут: ускорение и натяжение. Пусть $\mu_1 < \frac{1}{2}$. Груз m опускается, груз $2m$ скользит вправо, трение на него направлено влево и равно $F_1 = \mu_1 N_1 = 2\mu_1 mg$ (второй закон Ньютона по y для груза $2m$: $N_1 = 2mg$). Нить нерастяжима — ускорения грузов равны по модулю. Второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} &\text{груз } 2m,\ \text{ось } x: \quad 2ma = T - 2\mu_1 mg, \\ &\text{груз } m,\ \text{ось } y \text{ вниз}: \quad ma = mg - T. \end{aligned}$$

Складываем — T сокращается:

$$3ma = mg - 2\mu_1 mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g(1-2\mu_1)}{3},$$

$$T = mg - ma = \frac{2}{3}mg\,(1+\mu_1).$$

При $\mu_1 < \frac{1}{2}$ получилось $a > 0$ — грузы действительно едут; $T < mg$ — груз m «недотягивает» нить.

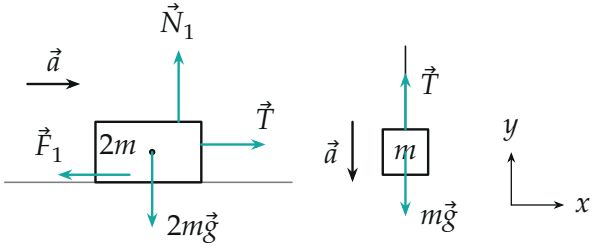


Рис. 1. Силы на грузы, когда они едут ($\mu_1 < \frac{1}{2}$). Серая линия — верхняя грань

большого тела. Трение $\vec{F}_1$ на верхний груз направлено против его скольжения.

3. Силы на большое тело. На него действуют (рис. 2): сила тяжести $3m\vec{g}$; верхний груз давит вниз с силой $N_1 = 2mg$ и тянет вправо трением $F_1 = 2\mu_1 mg$ (третий закон Ньютона); нить действует на блок двумя участками — горизонтальным (сила T влево) и вертикальным (сила T вниз); стол — силами $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_2$. Блок невесомый и укреплён на теле, поэтому всё, что нить делает с блоком, достаётся телу.

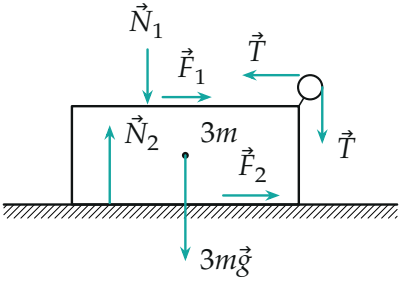


Рис. 2. Силы на большое тело вместе с блоком. Нить тянет блок и влево, и вниз; стол удерживает тело трением покоя $\vec{F}_2$.

4. Условие покоя большого тела. Второй закон Ньютона для неподвижного большого тела в проекциях:

$$\begin{aligned} y: &\quad N_2 - 3mg - N_1 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = 5mg + T, \\ x: &\quad F_1 - T + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = T - 2\mu_1 mg. \end{aligned}$$

Подставим T из шага 2:

$$F_2 = \frac{mg\,(2 - 4\mu_1)}{3} > 0, \qquad N_2 = \frac{mg\,(17 + 2\mu_1)}{3}.$$

$F_2 > 0$ — трение стола направлено вправо: без него тело поехало бы влево, к грузу $2m$. Трение покоя не больше максимального, $F_2 \le \mu_2 N_2$:

$$\frac{mg\,(2 - 4\mu_1)}{3} \le \mu_2 \frac{mg\,(17 + 2\mu_1)}{3} \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \ge \frac{2 - 4\mu_1}{17 + 2\mu_1}.$$

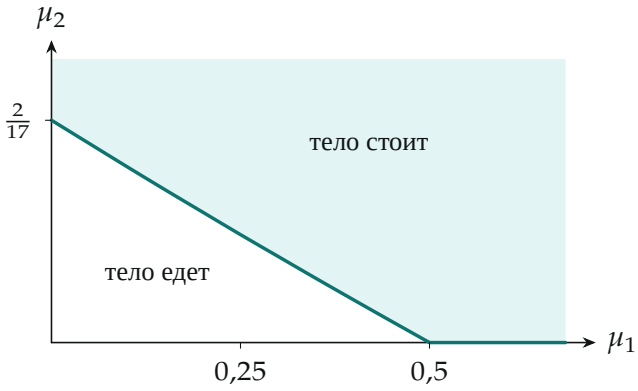


Рис. 3. Область покоя большого тела на плоскости (μ_1, μ_2) (закрашена, граница включена). Кривая $\mu_2 = \dfrac{2-4\mu_1}{17+2\mu_1}$ построена по точкам (python, шаг 0,05); при $\mu_1 \geq \frac{1}{2}$ подходит любое μ_2.

Обратите внимание. Нить через блок прижимает большое тело к столу: в N_2 входит натяжение T, а не только вес двух тел. И натяжение при движении грузов не равно mg: его надо найти из динамики грузов.

Ответ. Большое тело неподвижно, если $\mu_1 \geq \dfrac{1}{2}$ (при любом μ_2) или $\mu_2 \geq \dfrac{2-4\mu_1}{17+2\mu_1}$. Эти условия объединяются в одно: при $\mu_1 \geq \frac{1}{2}$ правая часть второго неравенства не больше нуля, и оно выполнено само.

Проверка. Размерность: обе стороны неравенства безразмерны. Пределы: при $\mu_1 = 0$ (гладкая верхняя грань) $\mu_2 \geq \frac{2}{17}$ — тогда $T = \frac{2}{3}mg$, $N_2 = \frac{17}{3}mg$, отношение $\frac{2}{17}$, верно. При $\mu_1 \to \frac{1}{2}$ граница $\to 0$: грузы почти стоят, $T \to mg$ и трение от груза почти полностью гасит нить. Второй способ — для системы «большое тело + оба груза» по оси x: внешняя горизонтальная сила одна, F_2, и она равна $2m \cdot a$ (горизонтально ускоряется только груз $2m$): $F_2 = \frac{2mg(1-2\mu_1)}{3}$ — то же, что в шаге 4.

Физический смысл. Тело тянет к грузу $2m$ лишь «недокомпенсированная» часть натяжения, $T - F_1$; она тем меньше, чем больше трение между грузом и телом, поэтому с ростом μ_1 от стола требуется всё меньше трения.

Ответ. $\mu_1 \geq \dfrac{1}{2}$ (при любом μ_2) или $\mu_2 \geq \dfrac{2-4\mu_1}{17+2\mu_1}$.