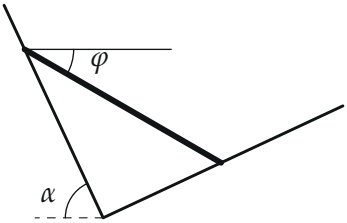
Стержень в двугранном угле

Задача 6. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 6] Массивный стержень, расположенный в вертикальной плоскости, опирается своими концами на две гладкие взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых наклонена под углом α к горизонту (см. рисунок, $\alpha > 45°$). При каком угле φ между стержнем и горизонтом стержень будет находиться в равновесии? Будет ли это равновесие устойчивым?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие и его устойчивость. Плоскости гладкие — трения нет, силы реакции работы не совершают (они перпендикулярны скоростям концов). Поэтому стержень ведёт себя как тело в поле тяжести с одной степенью свободы, углом φ: равновесие там, где высота центра тяжести $h(\varphi)$ экстремальна; минимум высоты — устойчивое равновесие, максимум — неустойчивое. Найдём $h(\varphi)$ и её экстремумы, а ответ проверим силами.

Обозначения. O — ребро двугранного угла (на рисунках — вершина); A — верхний конец стержня, на крутой грани (наклон α); B — нижний конец, на пологой грани (наклон $90° - \alpha$); C — середина стержня, его центр тяжести; l — длина стержня; h — высота точки C над ребром O. Угол φ считаем положительным, когда стержень опускается от A к B (как на рисунке условия).

1. Высота центра тяжести. Треугольник AOB прямоугольный: угол при O прямой, грани перпендикулярны. Грань OA наклонена к горизонту под углом α, стержень — под углом φ, поэтому угол между ними при вершине A равен $\beta = \alpha - \varphi$ (рис. 1). Из прямоугольного треугольника

$$OA = l\cos(\alpha - \varphi), \qquad y_A = OA\sin\alpha = l\cos(\alpha - \varphi)\sin\alpha.$$

Середина C ниже конца A на половину вертикальной проекции стержня, $\frac{l}{2}\sin\varphi$:

$$h(\varphi) = l\cos(\alpha-\varphi)\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

По формуле $2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ при $x = \alpha-\varphi$, $y = \alpha$: $2\cos(\alpha-\varphi)\sin\alpha = \sin(2\alpha-\varphi) + \sin\varphi$, и

$$h(\varphi) = \frac{l}{2}\sin(2\alpha-\varphi).$$

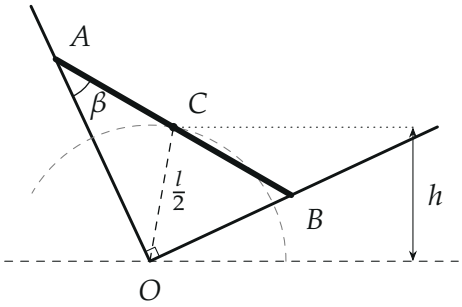


Рис. 1. Геометрия при $\alpha = 65°$, $\varphi = 30°$; $\beta = \alpha-\varphi$. Середина гипотенузы C удалена от вершины прямого угла O на $\frac{l}{2}$ — она ходит по окружности (серый пунктир).

Второй способ, короче: C — середина гипотенузы прямоугольного треугольника AOB, поэтому $OC = \frac{l}{2}$ при любом φ, и центр тяжести движется по окружности радиуса $\frac{l}{2}$ с центром O. Луч OA составляет с горизонтальным направлением вправо угол $180°-\alpha$; луч OC повёрнут от него к OB на угол $\angle COA = \angle CAO = \beta$ (треугольник OCA равнобедренный, $OC = CA = \frac{l}{2}$). Итого OC наклонён на $180°-(2\alpha-\varphi)$, а синус этого угла равен $\sin(2\alpha-\varphi)$. Отсюда снова $h = \frac{l}{2}\sin(2\alpha-\varphi)$.

2. Пределы изменения угла. Стержень может лечь на пологую грань: тогда A совпадает с O, $\varphi = -(90°-\alpha) = \alpha-90°$. Может лечь на крутую грань: B совпадает с O, $\varphi = \alpha$. Итак,

$$\alpha-90° \le \varphi \le \alpha, \qquad \text{и тогда} \qquad \alpha \le 2\alpha-\varphi \le \alpha+90°.$$

3. Положения равновесия. Внутри промежутка $h(\varphi)$ экстремальна, где $\sin(2\alpha - \varphi)$ наибольший, то есть при $2\alpha - \varphi = 90°$:

$$\varphi_0 = 2\alpha - 90°.$$

При $\alpha > 45°$ это $\varphi_0 > 0$, и $\varphi_0 < \alpha$, так что положение внутри промежутка. Здесь $h = \frac{l}{2}$ — центр тяжести стоит точно над ребром O (рис. 2). На краях промежутка ($\varphi = \alpha$ и $\varphi = \alpha - 90°$) стержень лежит на одной из граней — это тоже положения равновесия: дальше повернуться ему некуда, а повернуться обратно значит поднять центр тяжести.

Проверка силами. В положении φ_0 на стержень действуют три силы: $m\vec{g}$ в точке C и силы реакции $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, перпендикулярные граням (они гладкие). Перпендикуляр к грани OA в точке A параллелен OB, перпендикуляр к OB в точке B параллелен OA, поэтому линии действия реакций пересекаются в четвёртой вершине P прямоугольника $OAPB$. Тело под действием трёх непараллельных сил в равновесии, только если их линии действия пересекаются в одной точке (условие моментов относительно P). Значит, вертикаль через C должна пройти через P. Но C — центр прямоугольника, и прямая PC проходит через O: вертикаль через C проходит через O, C над O — то же условие, что в шаге 3. Разложив $m\vec{g}$ по направлениям OB и OA, получим $N_A = mg\cos\alpha$, $N_B = mg\sin\alpha$.

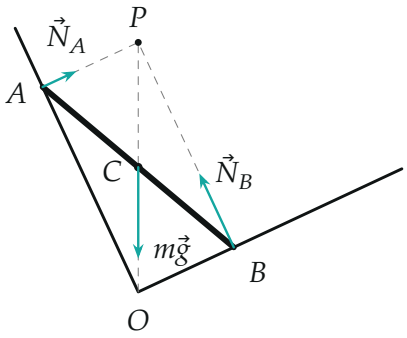


Рис. 2. Равновесие при $\varphi_0 = 2\alpha - 90°$ ($\alpha = 65°$, $\varphi_0 = 40°$): линии действия $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ и $m\vec{g}$ сходятся в точке P; центр тяжести C стоит над ребром O. Длины стрелок пропорциональны модулям: $N_A = mg\cos\alpha$, $N_B = mg\sin\alpha$.

4. Устойчивость. Строим $h(\varphi)$ по точкам (рис. 3). В положении φ_0 высота центра тяжести максимальна, $h = \frac{l}{2}$: при малом повороте в любую сторону центр тяжести опускается, сила тяжести уводит стержень дальше — равновесие *неустойчивое*. На краях высота минимальна на своём участке: $h = \frac{l}{2}\sin\alpha$ при $\varphi = \alpha$ и $h = \frac{l}{2}\cos\alpha$ при $\varphi = \alpha - 90°$. Отклонить стержень от грани можно только подняв центр тяжести, и сила тяжести возвращает его обратно — эти положения *устойчивые*.

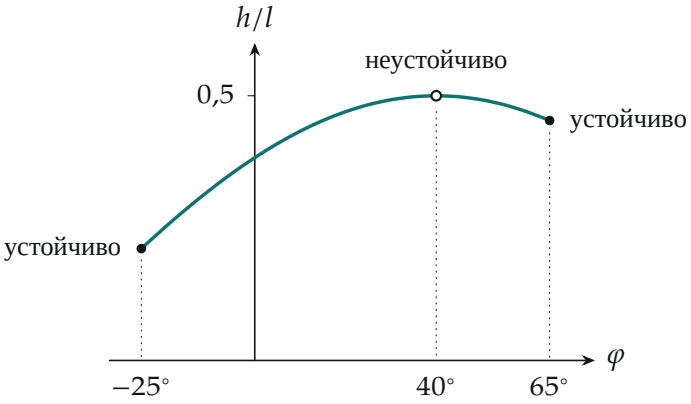


Рис. 3. Высота центра тяжести $h = \frac{l}{2}\sin(2\alpha - \varphi)$ при $\alpha = 65°$ (python, шаг 5°). Чёрные точки — стержень лежит на грани (минимумы на краях), светлая — вершина кривой, $\varphi_0 = 40°$.

Обратите внимание. Положения на краях — не «вырожденные»: производная h там не равна нулю, но угол дальше не меняется (стержень упёрся в грань), а при повороте обратно центр тяжести поднимается. Поэтому равновесий три, а не одно.

Ответ. Равновесие при $\varphi_0 = 2\alpha - 90°$ — неустойчивое (центр тяжести над ребром, $h = \frac{l}{2}$ — наибольшая высота); при $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \alpha - 90°$ (стержень лежит на одной из граней) — устойчивое.

Проверка. Размерность: $[h] = [l]$. Частный случай $\alpha = 45°$: грани симметричны, $\varphi_0 = 0$ — горизонтальный стержень над ребром, как и подсказывает симметрия. Второй способ (силы, рис. 2) дал то же положение; python: максимум $h(\varphi)$ при $\alpha = 60°$ перебором — при $\varphi = 30{,}0° = 2\alpha - 90°$.

Физический смысл. Середина стержня, упирающегося в стенки прямого угла, всегда на расстоянии $\frac{l}{2}$ от ребра. Выше всего она, когда стоит прямо над ребром, — там стержень балансирует, как карандаш на острие.

Ответ. $\varphi = 2\alpha - 90^\circ$ — равновесие неустойчивое; $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \alpha - 90^\circ$ (стержень лежит на грани) — устойчивое.