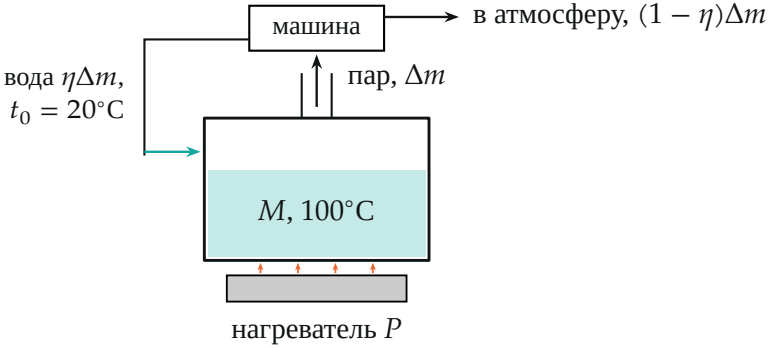
Котёл парового двигателя

Задача 2. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Котёл парового двигателя вмещает массу воды $M = 10$ кг. В котле при атмосферном давлении кипит вода, для чего к котлу от нагревателя подводят мощность $P = 10$ кВт. Образовавшийся пар совершает работу, часть его теряется в атмосфере, но $\eta = 0{,}95$-ая часть его массы возвращается обратно в котёл в виде воды с температурой $t_0 = 20°\text{C}$. Через какое время в котле останется половина первоначального количества воды? Вначале котёл полностью заполнен водой. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.



Поясняющий рисунок. Из котла уходит пар; доля η его массы возвращается водой при t_0, остальное теряется.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода в котле всё время кипит при $t_к = 100°\text{C}$ (атмосферное давление), поэтому теплота нагревателя идёт на две вещи: испарить воду и нагреть до кипения холодную воду, которая возвращается. За каждую порцию испарившейся воды котёл навсегда теряет только долю $1 - \eta$. Режим установившийся: за равные промежутки времени испаряется одна и та же масса, и масса воды в котле убывает равномерно. Это задача на уравнение теплового баланса для малого промежутка времени.

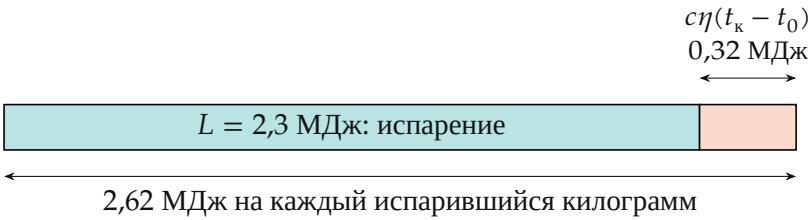
Обозначения. Δt — малый промежуток времени, Δm — масса воды, испарившейся за Δt, $t_к = 100°\text{C}$, τ — искомое время. Тепловые потери

котла и теплоёмкость его стенок не учитываем: вся мощность P идёт воде.

1. Тепловой баланс котла за время Δt. Закон сохранения энергии для содержимого котла: теплота $P\Delta t$ от нагревателя равна теплоте парообразования массы Δm плюс теплоте на нагрев вернувшейся воды массы $\eta\Delta m$ от t_0 до $t_к$ (вернувшаяся вода смешивается с кипящей и нагревается за её счёт, а котёл компенсирует это нагревателем):

$$P\Delta t = L\Delta m + c\,\eta\Delta m\,(t_к - t_0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{L + c\eta\,(t_к - t_0)}.$$

Обратите внимание: возвращающуюся воду надо снова греть до кипения; если про это забыть, ответ получится примерно на 12% меньше.

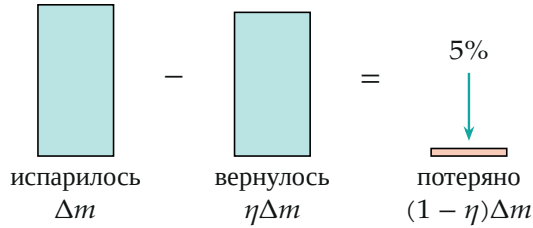


Куда идёт теплота на один испарившийся килограмм (в масштабе): почти всё — на испарение, около 12% *— на подогрев вернувшейся воды.*

2. Скорость убыли воды. За Δt из котла ушло Δm, а вернулось $\eta\Delta m$. Масса воды в котле уменьшилась на $(1-\eta)\Delta m$:

$$\mu \equiv \frac{(1-\eta)\Delta m}{\Delta t} = \frac{(1-\eta)P}{L + c\eta\,(t_к - t_0)}.$$

Правая часть от массы воды в котле не зависит, поэтому μ постоянна, и масса убывает по прямой: $m(t) = M - \mu t$.

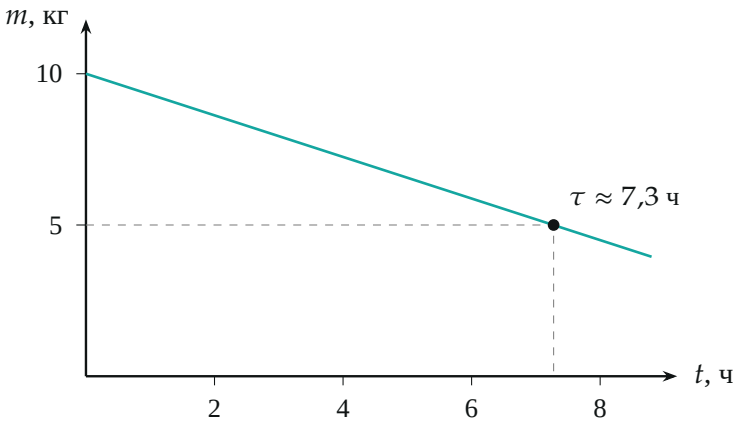


Масса за малое время Δt (высоты столбиков в масштабе): котёл теряет лишь 5% испарившейся воды.

3. Время до половины. Масса должна уменьшиться на $M/2$:

$$\tau = \frac{M/2}{\mu} = \frac{M(L + c\eta\,(t_к - t_0))}{2(1-\eta)P}$$
$$= \frac{10 \cdot (2{,}3 \cdot 10^6 + 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}95 \cdot 80)}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 10^4}\ \text{с} \approx 2{,}62 \cdot 10^4\ \text{с} \approx 7{,}3\ \text{ч}.$$

Второй способ — сразу за всё время. Чтобы котёл потерял массу $M/2$, должно испариться $\dfrac{M/2}{1-\eta} = 100$ кг воды (вода многократно проходит круг «котёл — машина — котёл»). На каждый испарившийся килограмм уходит $L + c\eta(t_к - t_0) = 2{,}62$ МДж, всего $Q = 100 \cdot 2{,}62 \cdot 10^6 = 2{,}62 \cdot 10^8$ Дж; при мощности P на это нужно $Q/P = 2{,}62 \cdot 10^4$ с — то же самое.



Масса воды в котле убывает равномерно; половина остаётся через $\tau \approx 7{,}3$ ч.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{Дж/кг}}{\text{Вт}} = \text{с}$. Пределы: при $\eta \to 1$ (ничего не теряется) $\tau \to \infty$ — воды в котле не убывает; при $\eta = 0$ получаем $\tau = ML/(2P)$ — просто выкипание половины воды. Оба способа дают $2{,}62 \cdot 10^4$ с.

Смысл: возврат 95% пара продлевает работу котла в $1/(1-\eta) = 20$ раз по сравнению с простым выкипанием, а подогрев возвращённой воды съедает около 12% мощности.

Ответ. $\tau = \dfrac{M(L + c\eta(t_к - t_0))}{2(1-\eta)P} \approx 2{,}62 \cdot 10^4$ с $\approx 7{,}3$ ч, где $t_к = 100°\text{C}$.