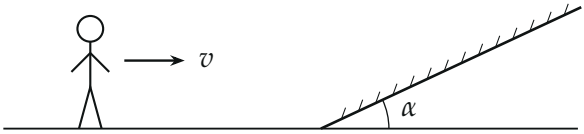
Мальчик и наклонное зеркало

Задача 4. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Длинное наклонное зеркало соприкасается с горизонтальным полом и наклонено под углом α к вертикали (см. рисунок). К зеркалу приближается мальчик, идущий по горизонтальной поверхности со скоростью v. Глаза мальчика расположены на высоте h от горизонтальной поверхности. На каком максимальном расстоянии от нижнего края зеркала мальчик увидит (а) изображение своих глаз (б) своё изображение во весь рост?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на построение изображений в плоском зеркале. Точку предмета видно в зеркале, если отражённый луч от неё попадает в глаз. Все отражённые лучи от точки идут так, будто выходят из её изображения — точки, симметричной ей относительно плоскости зеркала. Поэтому глаз видит изображение точки, если отрезок «глаз — изображение» пересекает само зеркало, а не его продолжение под полом. У зеркала есть край — нижняя точка A на полу; именно луч через край задаёт предельное расстояние.

Обозначения. A — нижний край зеркала, Г — глаза, H — ноги мальчика (точка на полу под глазами), Г′ и H' — их изображения. x — расстояние HA от мальчика до края зеркала. Обратите внимание: в тексте условия сказано «к вертикали», но на рисунке условия α — угол между зеркалом и полом; так его понимает и решение организаторов, так считаем и мы. Скорость v для ответа не нужна: ответ — положение, а не время.

Пункт (а). Изображение глаз.

1. Когда видно изображение глаз. Изображение Г′ симметрично Г относительно плоскости зеркала: отрезок ГГ′ перпендикулярен зеркалу и делится им пополам. Глаз видит Г′ по лучу, который идёт из глаза к

зеркалу по перпендикуляру и возвращается по нему же. Значит, изображение глаз видно, пока перпендикуляр, опущенный из глаз на плоскость зеркала, попадает на зеркало, то есть не ниже точки A.

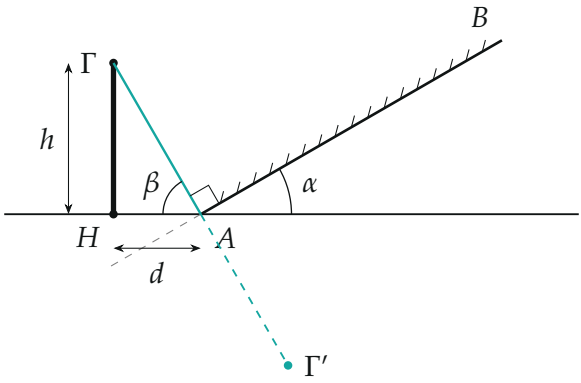
2. Предельное положение. При удалении мальчика основание перпендикуляра сползает по зеркалу вниз. Предел — перпендикуляр приходит точно в A: $\angle \Gamma AB = 90^\circ$, где B — точка на зеркале. Зеркало AB образует с полом угол α, поэтому, прямая $A\Gamma$ образует с полом со стороны мальчика угол

$$\angle \Gamma AH = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника ΓHA (катеты $\Gamma H = h$ и $HA = d$):

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{h}{d} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{h}{\operatorname{ctg}\alpha} = h \operatorname{tg}\alpha.$$

Ближе чем d перпендикуляр попадает на зеркало выше A, и глаза видны; дальше — попадает на продолжение зеркала под полом, и глаз своего изображения не видит.



Пункт (а), предельное положение ($\alpha = 30^\circ$, масштаб соблюдён). $\beta = 90^\circ - \alpha$. Луч из глаз Γ падает на край A перпендикулярно зеркалу и возвращается в глаз; изображение Γ' лежит на продолжении этого луча.

Пункт (б). Изображение во весь рост.

3. Что нужно увидеть. Во весь рост — значит, видны изображения и глаз, и ног. Глаза видны при $x \le d$, поэтому осталось найти, когда видны ноги H. Они лежат на полу; ближайший к ним луч, который может отразиться в глаз, идёт по полу в край A.

4. Луч от ног через край зеркала. Закон отражения: падающий и отражённый лучи образуют с зеркалом равные углы. Падающий луч HA идёт по полу и образует с зеркалом угол α. Отражённый луч AГ образует с зеркалом такой же угол α по другую сторону, то есть он повёрнут относительно направления падения на 2α. Тогда с полом со стороны мальчика он образует угол

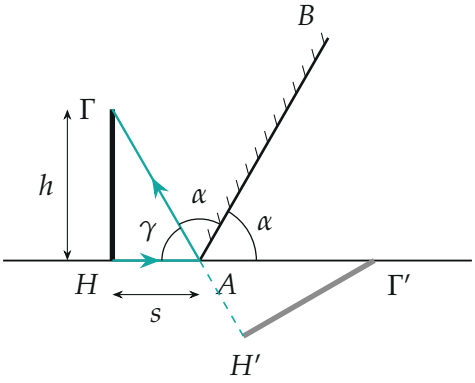
$$\angle HA\Г = 180^\circ - 2\alpha.$$

Отражённый луч уходит назад, к мальчику, только если этот угол острый: $180^\circ - 2\alpha < 90^\circ$, то есть $\alpha > 45^\circ$. При $\alpha \le 45^\circ$ лучи от ног уходят от зеркала вперёд и вверх, и ног мальчик не увидит ни на каком расстоянии.

5. Предельное расстояние. Луч AГ должен попасть в глаза на высоте h над точкой H. Из прямоугольного треугольника ГHA:

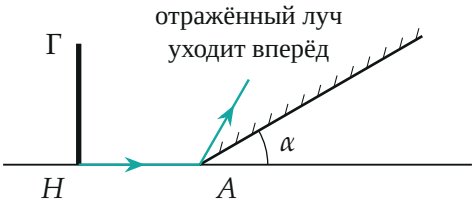
$$\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = \frac{h}{s} \qquad \Rightarrow \qquad s = h \operatorname{ctg}(180^\circ - 2\alpha) = -h \operatorname{ctg} 2\alpha$$

(при $\alpha > 45^\circ$ это положительное число). Через изображения то же самое: H' симметрично H относительно зеркала, и в предельном положении точки Г, A, H' лежат на одной прямой. Ближе s отрезок ГH' пересекает зеркало выше A — ноги видны; дальше — проходит под полом, и не видны.



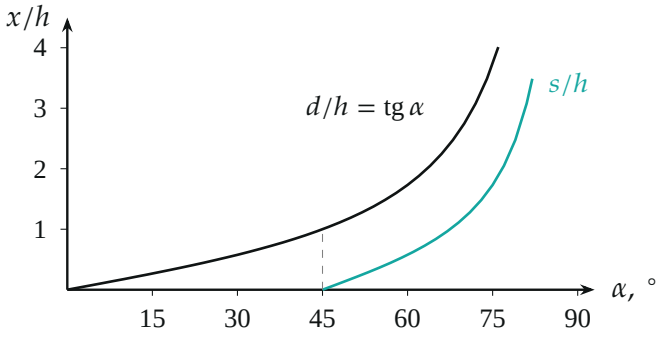
Пункт (б), предельное положение ($\alpha = 60°$, масштаб соблюдён). $\gamma = 180° - 2\alpha$. Луч от ног H по полу отражается краем A в глаза Г. *Серый отрезок $H'\Gamma'$ — изображение мальчика;* Г, A, H' *на одной прямой.*

6. Почему при $\alpha \le 45°$ ног не видно. При пологом зеркале луч от ног, идущий по полу, после отражения поворачивает на угол $2\alpha \le 90°$ и уходит вверх и вперёд, за зеркало; лучи от ног, падающие на зеркало выше края, идут к нему снизу под ещё меньшим углом и отражаются тоже вперёд.



Пологое зеркало ($\alpha = 30°$): луч от ног после отражения идёт под углом $2\alpha < 90°$ к полу вперёд, к мальчику не возвращается.

Обратите внимание: в пункте (б) расстояние меньше, чем в (а): $d - s = h\operatorname{tg}\alpha + h\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{h}{\sin 2\alpha} > 0$. Чтобы увидеть себя целиком, надо подойти ближе, чем для того, чтобы увидеть свои глаза.



Предельные расстояния в единицах h: чёрная — для глаз, бирюзовая — во весь рост (есть только при $\alpha > 45°$, всегда ниже чёрной).

Проверка. Размерность: h на безразмерную функцию угла. Пределы: при $\alpha \to 90°$ (вертикальное зеркало) $d \to \infty$ и $s \to \infty$ — в вертикальном зеркале себя видно с любого расстояния, как и в жизни; при $\alpha \to 0$ (зеркало легло на пол) $d \to 0$; при $\alpha \to 45°$ $s \to 0$ — отражённый от края луч уходит вертикально вверх. Численная проверка на python (перебор положений мальчика для $\alpha = 50° \ldots 80°$ по построению изображений) даёт те же d и s.

Смысл: край зеркала — последняя точка, через которую ещё идёт нужный луч; предельное расстояние — то, при котором этот луч проходит ровно через край.

Ответ. (а) $d = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$; (б) $s = -h\,\mathrm{ctg}\,2\alpha = h\,\mathrm{ctg}(180° - 2\alpha)$ при $\alpha > 45°$; при $\alpha \le 45°$ во весь рост себя не увидеть (α — угол между зеркалом и полом, как на рисунке).