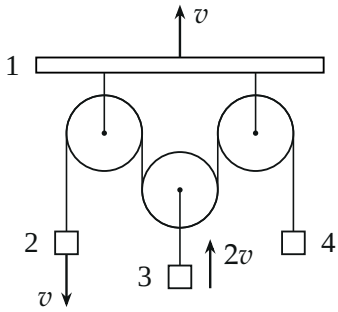
Тела на блоках: скорость четвёртого

Задача 6. [ИОШ 2025/26, отборочный этап, 9 класс, задача 6] В системе, изображённой на рисунке, тела 1, 2 и 3 имеют скорости, показанные на рисунке. Найти величину и направление скорости тела 4.



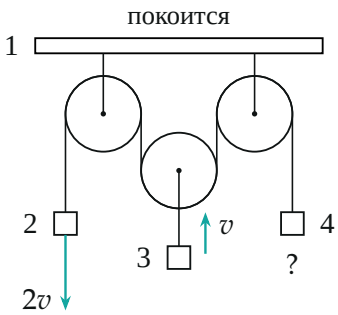
▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело 1 — планка, на которой висят два неподвижных относительно неё блока. Через блоки перекинута одна нерастяжимая нить: тело 2 → левый блок → подвижный блок с телом 3 → правый блок → тело 4. Это задача на кинематическую связь: длина нити постоянна, поэтому сумма изменений длин всех её кусков равна нулю. Куски удобно мерить от блоков, а блоки движутся вместе с планкой. Поэтому перейдём в систему отсчёта планки — в ней блоки неподвижны, и считать удлинения просто.

Обозначения. Ось y направлена вверх. В системе отсчёта тела 1 (планки): ℓ_2 — длина куска нити от левого блока до тела 2, ℓ_4 — от правого блока до тела 4, $\ell_м$ — длина каждого из двух вертикальных кусков, на которых висит подвижный блок; u'_i — проекции скоростей тел на ось y в этой системе, u_i — относительно земли. Нить нерастяжима и не проскальзывает по блокам, её куски вертикальны.

1. Скорости в системе отсчёта планки. Закон сложения скоростей: скорость тела относительно земли равна скорости относительно планки плюс скорость планки, $\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{v}_1$, то есть $\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v}_1$. В проекциях на y ($v_1 = +v$):

$$u'_2 = -v - v = -2v, \qquad u'_3 = 2v - v = +v.$$

Тело 2 удаляется от блоков вниз со скоростью $2v$, тело 3 вместе с подвижным блоком поднимается со скоростью v.



Скорости в системе отсчёта тела 1: планка и блоки покоятся, тело 2 идёт вниз со скоростью $2v$, тело 3 с подвижным блоком — вверх со скоростью v. Скорость тела 4 надо найти.

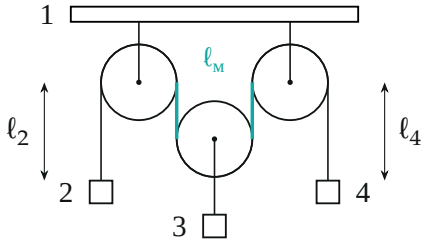
2. Нить нерастяжима. Длина нити $\ell_2 + 2\ell_\text{м} + \ell_4 +$ (дуги на блоках) постоянна, а дуги на блоках не меняются. За малое время Δt:

$$\Delta\ell_2 + 2\Delta\ell_\text{м} + \Delta\ell_4 = 0.$$

Каждый кусок меряется от неподвижного (в этой системе) блока вниз до тела, поэтому его удлинение равно смещению тела вниз: $\Delta\ell_2 = -u'_2\Delta t = 2v\Delta t$, $\Delta\ell_\text{м} = -u'_3\Delta t = -v\Delta t$ (подвижный блок поднимается — оба его куска укорачиваются), $\Delta\ell_4 = -u'_4\Delta t$. Подставим:

$$2v\Delta t - 2v\Delta t - u'_4\Delta t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u'_4 = 0.$$

Сколько нити тело 2 вытянуло через левый блок, столько же освободил поднимающийся подвижный блок: правому концу ничего не достаётся. Тело 4 относительно планки покоится.



Куски нити в системе отсчёта планки. За Δt кусок ℓ_2 удлиняется на $2v\Delta t$, каждый из двух бирюзовых кусков $\ell_м$ укорачивается на $v\Delta t$, значит ℓ_4 не меняется.

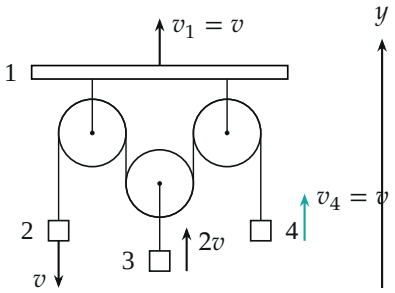
3. Возврат к земле. Снова закон сложения скоростей:

$$u_4 = u_4' + v_1 = 0 + v = v > 0.$$

Тело 4 движется *вверх* со скоростью v — вместе с планкой.

Второй способ — сразу в системе земли. Пусть y_i — координаты тел. Длины кусков: $\ell_2 = y_1 - y_2 + \text{const}$, $\ell_м = y_1 - y_3 + \text{const}$, $\ell_4 = y_1 - y_4 + \text{const}$. Постоянство длины нити: $(y_1 - y_2) + 2(y_1 - y_3) + (y_1 - y_4) = \text{const}$, откуда для скоростей

$$4u_1 - u_2 - 2u_3 - u_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_4 = 4v - (-v) - 2 \cdot 2v = v.$$



Ответ на рисунке системы: тело 4 (бирюзовая стрелка) движется вверх со скоростью v, как и тело 1.

Обратите внимание: в уравнении связи планка входит с коэффициентом 4 — по числу кусков нити, которые она тянет за собой. Если забыть, что блоки движутся вместе с планкой, и написать $u_2+2u_3+u_4=0$, получится неверное $u_4=-3v$.

Проверка. Размерность — скорость. Частный случай: если бы все тела двигались вместе с планкой ($u_2=u_3=v$), уравнение связи дало бы $u_4=4v-v-2v=v$ — система движется как одно целое, верно. Оба способа дают $u_4=+v$.

Смысл: удобнее всего считать нить там, где неподвижны блоки; в системе планки тело 4 стоит, а с землёй оно уезжает вверх вместе с планкой.

Ответ. $u_4=v$, скорость направлена вверх (тело 4 покоится относительно тела 1).