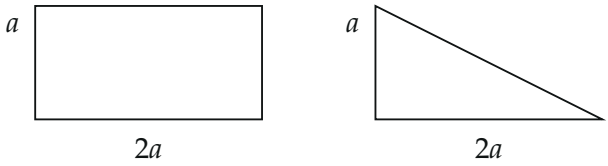
Горящая пластина

Задача 1. [ИОШ 2025/26, 10 класс, задача 1] Имеется пластина в форме прямоугольника, стороны которого отличаются вдвое, сделанная из горючего материала (левый рисунок, на котором меньшая сторона прямоугольника обозначена a). Пластину поджигают одновременно по всему периметру, и через время t она оказывается полностью охваченной огнём. Через какое время будет полностью охвачена огнём пластина из того же материала, но в форме прямоугольного треугольника, представляющего собой половину первой пластины (правый рисунок)?

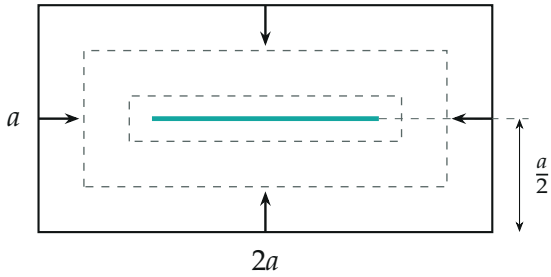


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равномерное движение фронта: огонь от каждой точки края идёт внутрь пластины с одной и той же скоростью v (материал один). Через время τ сгорела полоса ширины $v\tau$ вдоль всего периметра. Пластина полностью охвачена, когда огонь дошёл до точки, *самой удалённой от краёв*. Поэтому задача сводится к геометрии: найти наибольшее расстояние от точки пластины до её границы в прямоугольнике и в треугольнике.

Обозначения. v — скорость распространения огня по пластине; t — время для прямоугольника; t_1 — для треугольника; r — радиус вписанной в треугольник окружности; c — гипотенуза треугольника.

1. Прямоугольник: скорость огня. Через время τ несгоревшей остаётся прямоугольник, у которого каждая сторона отодвинулась внутрь на $v\tau$: размеры $(2a-2v\tau)\times(a-2v\tau)$. Короткая сторона обращается в нуль первой — при $v\tau = a/2$: несгоревшим остаётся отрезок средней линии длиной a (на рисунке — бирюзовый). Его точки удалены от длинных сторон на $a/2$, и это самые далёкие от края точки. Значит, огонь прошёл $a/2$ за время t:

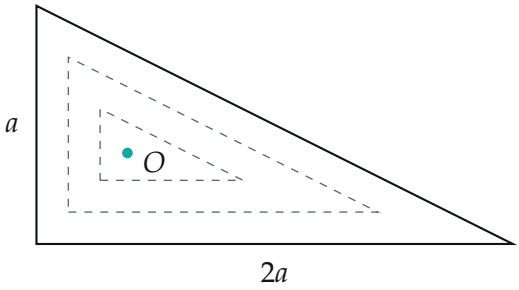
$$v = \frac{a/2}{t} = \frac{a}{2t}.$$



Фронт огня в прямоугольнике (штриховые линии — граница несгоревшего через равные промежутки времени). Последним сгорает отрезок средней линии, удалённый от краёв на $a/2$.

2. Треугольник: какая точка сгорит последней. Точка, удалённая от всех трёх сторон на одно и то же наибольшее расстояние, — центр O вписанной окружности: он равноудалён от сторон на r, а любая другая точка ближе r хотя бы к одной стороне. Через время τ несгоревшим остаётся треугольник, подобный исходному, со сторонами, отодвинутыми внутрь на $v\tau$, и с тем же центром вписанной окружности; он стягивается в точку O при $v\tau = r$. Поэтому

$$t_1 = \frac{r}{v} = \frac{2r}{a}\,t.$$



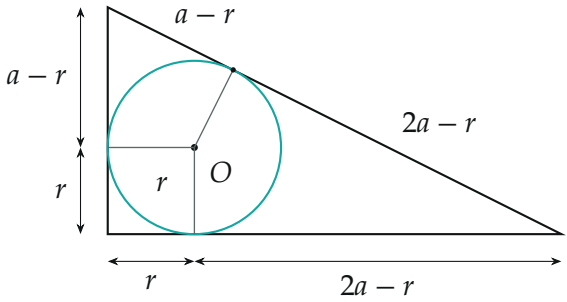
Фронт огня в треугольнике: несгоревшая часть — всё меньшие подобные треугольники с общим центром O вписанной окружности.

3. Радиус вписанной окружности. Гипотенуза по теореме Пифагора:

$$c = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}\,a.$$

Отрезки касательных, проведённых из одной вершины к окружности, равны. От вершины прямого угла до точек касания на катетах — по r (там получается квадрат со стороной r). Значит, от верхней вершины до точек касания — $a - r$, от правой — $2a - r$, а гипотенуза состоит ровно из этих двух отрезков:

$$c = (a - r) + (2a - r) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3a - c}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\, a \approx 0{,}382\, a.$$

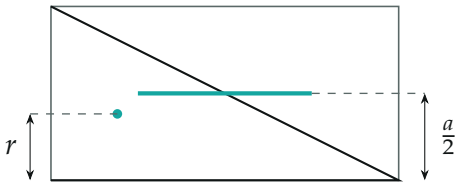


Касательные из одной вершины равны: гипотенуза $c = (a - r) + (2a - r)$.

Второй способ — через площадь: площадь треугольника равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр, $S = rp$. Здесь $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$, $p = \frac{a + 2a + \sqrt{5}a}{2}$, откуда $r = \dfrac{2a}{3 + \sqrt{5}} = \dfrac{(3 - \sqrt{5})a}{2}$ — то же самое.

4. Время.

$$t_1 = \frac{2r}{a}\, t = \left(3 - \sqrt{5}\right) t \approx 0{,}76\, t.$$



Сравнение: в прямоугольнике самые удалённые от края точки (отрезок) находятся на $a/2 = 0{,}5a$ от края, в треугольнике центр O — на $r \approx 0{,}38a$. Огонь проходит меньший путь.

Обратите внимание. Половина пластины горит *не* вдвое быстрее: время определяется не площадью, а наибольшим расстоянием до края. Оно уменьшилось лишь с $0{,}5a$ до $0{,}38a$.

Проверка. Размерность: t_1 — время, множитель $3 - \sqrt{5}$ безразмерен. Сравнение: $t_1 < t$, потому что треугольник лежит внутри прямоугольника: расстояние от любой его точки до его границы не больше, чем до границы прямоугольника. Численно: $r/(a/2) = 0{,}764$ и $3 - \sqrt{5} = 0{,}764$.

Ответ. $t_1 = \dfrac{r}{v} = \dfrac{2r}{a}\,t = \left(3 - \sqrt{5}\right) t \approx 0{,}76\,t$.

Смысл: огонь «съедает» пластину слоями от края, и время сгорания задаёт толщина самого толстого места — радиус наибольшего вписанного круга.

Ответ. $t_1 = \left(3 - \sqrt{5}\right) t \approx 0{,}76\,t$.