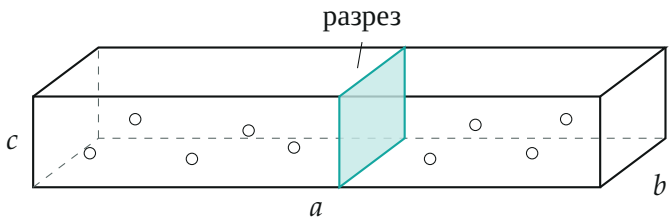
Пузырьки в заготовках

Задача 2. [ИОШ 2025/26, 10 класс, задача 2] На секретном металлургическом заводе производят заготовки из неизвестного металла в форме прямоугольного параллелепипеда размером $a \times b \times c$ ($a = 50$ см, $b = 16$ см, $c = 8$ см). Из-за нарушения технологии производства партия заготовок содержит пузырьки воздуха радиуса $r = 0{,}5$ см. В среднем каждая испорченная заготовка содержит $N = 5190$ таких пузырьков. Сколько в среднем пузырьков будет видно на разрезе, перпендикулярном стороне a?

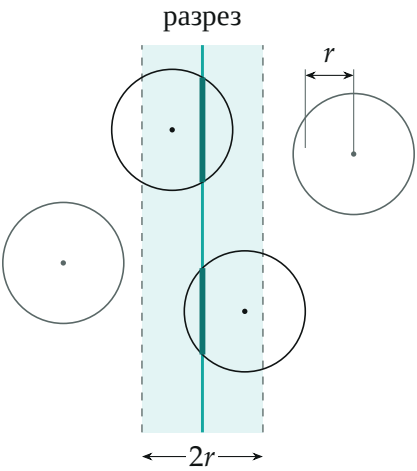


Поясняющий рисунок: заготовка, пузырьки и плоскость разреза, перпендикулярная стороне a.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача-оценка на геометрическую вероятность. Пузырьки разбросаны по заготовке равномерно, поэтому их число в любой части заготовки пропорционально объёму этой части. Нужно лишь понять, какие пузырьки «видны» на разрезе: это те, которые плоскость разреза пересекает. А это определяется положением центра пузырька.

Обозначения. x — расстояние от центра пузырька до плоскости разреза; $V = abc$ — объём заготовки; V_1 — объём слоя, где должен лежать центр видимого пузырька; N_1 — среднее число видимых пузырьков.

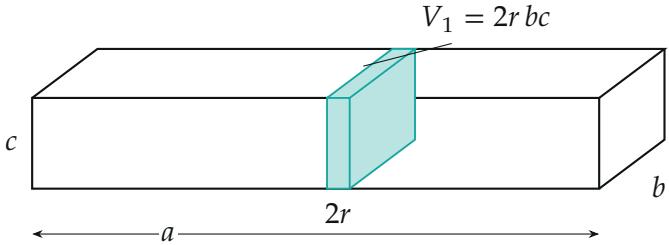
1. Когда пузырёк виден на разрезе. Плоскость пересекает шар радиуса r, если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса: $x < r$. Тогда на разрезе видна круглая дырочка радиуса $\sqrt{r^2 - x^2}$. При $x > r$ шар целиком по одну сторону от плоскости, и на разрезе его нет.



Вид сбоку (вдоль плоскости разреза). Пузырёк виден, если его центр ближе r к разрезу, — то есть лежит в слое толщины $2r$ (заливка). Бирюзовые отрезки — следы пузырьков на разрезе.

2. Объём слоя. Центры видимых пузырьков лежат в слое по обе стороны от разреза толщиной r каждая, а поперёк — на всём сечении $b \times c$:

$$V_1 = 2r \cdot b \cdot c.$$



Слой, в котором должен лежать центр видимого пузырька: толщина $2r$, сечение $b \times c$ (толщина на рисунке увеличена).

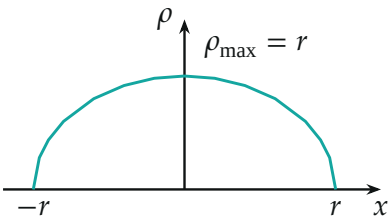
3. Доля пузырьков. Пузырьки распределены равномерно, поэтому в среднем число центров в части заготовки пропорционально её объёму:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{V_1}{V} = \frac{2r\,bc}{abc} = \frac{2r}{a}.$$

Размеры b и c сократились: важно лишь, какую долю длины a занимает слой.

4. Числа.

$$N_1 = \frac{2r}{a}N = \frac{2\cdot 0{,}5}{50}\cdot 5190 = \frac{5190}{50} \approx 103{,}8 \approx 104.$$



Радиус следа пузырька на разрезе $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$ в зависимости от расстояния x центра до плоскости. Видны все пузырьки с $|x| < r$, но след может быть и совсем маленьким.

Обратите внимание. Ответ — *среднее* число, поэтому дробное 103,8 законно: на конкретном разрезе окажется 100, 104, 110 пузырьков. И если считать, что пузырёк целиком внутри металла, центры лежат в отрезке длины $a - 2r$, и тогда $N_1 = \frac{2r}{a-2r}N \approx 106$ — поправка 2 %, в пределах точности оценки.

Проверка. Размерность: $\frac{2r}{a}$ безразмерно, N_1 — число. Предел: если бы пузырёк имел размер всей заготовки ($2r = a$), его видно было бы на любом разрезе, $N_1 = N$. Второй способ: пузырьков на сантиметр длины a в среднем $5190/50 = 103{,}8$, а виден каждый, чей центр на отрезке длины $2r = 1$ см вокруг разреза, — те же 103,8.

Ответ. $N_1 = \dfrac{2r}{a}N \approx 103{,}8$, то есть около 104 пузырьков.

Смысл: плоскость «задевает» не только пузырьки, центры которых в ней лежат, а всю полосу шириной в диаметр пузырька.

Ответ. $N_1 = \dfrac{2r}{a}N \approx 103{,}8$ (около 104 пузырьков).