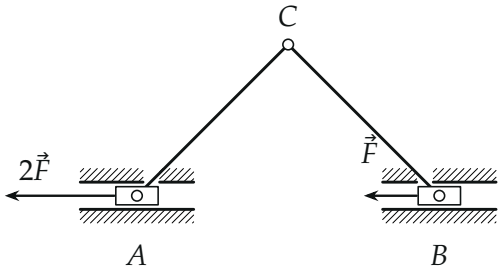
Шатунный механизм

Задача 5. [ИОШ 2025/26, 10 класс, задача 5] Шатунный механизм представляет собой два невесомых ползуна A и B — точечных массивных тела, которые могут скользить в гладких направляющих. Ползуны связаны двумя невесомыми стержнями — шатунами — AC и BC одинаковой длины ($AC = BC$), которые прикреплены к ползунам шарнирно и связаны между собой невесомым шарниром C (см. рисунок). В положении, показанном на рисунке, угол ACB прямой, а на ползуны действуют силы $2\vec{F}$ и $\vec{F}$, направленные вдоль направляющих (см. рисунок). Какой силой нужно действовать на шарнир C в равновесии? Трение отсутствует.



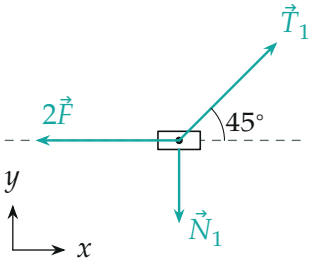
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие системы тел, связанных невесомыми стержнями. Главная идея: невесомый стержень с шарнирами на концах нагружен только на концах, поэтому сила, с которой он действует на шарнир или ползун, направлена *вдоль стержня* (иначе на сам стержень действовал бы ненулевой момент). Значит, у каждого ползуна известны направления всех сил: внешняя — вдоль направляющей, реакция гладкой направляющей — перпендикулярно ей, сила шатуна — вдоль шатуна. Из равновесия ползунов находим силы шатунов, а из равновесия шарнира C — искомую силу $\vec{Q}$.

Обозначения. Ось x — вдоль направляющих вправо, ось y — вверх. $\vec{T}_1$ — сила шатуна AC, действующая на ползун A, $\vec{T}_2$ — сила шатуна BC на ползун B; $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — реакции направляющих; $\vec{Q}$ — искомая сила, приложенная к шарниру C. Угол ACB прямой, а $AC = BC$, поэтому треугольник ACB равнобедренный прямоугольный и оба шатуна наклонены к направляющим под углом $45°$.

1. Ползун A**.** Ползун покоится, поэтому по первому закону Ньютона $2\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = 0$. Сила $\vec{N}_1$ вертикальна и в проекцию на x не входит — поэтому сначала проецируем на x: только сила шатуна может уравновесить $2F$, значит, шатун AC тянет ползун к шарниру C (растянут):

$$x: \quad T_1 \cos 45^\circ - 2F = 0 \;\Rightarrow\; T_1 = 2\sqrt{2}\,F;$$
$$y: \quad T_1 \sin 45^\circ - N_1 = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = 2F.$$

Реакция $\vec{N}_1$ направлена вниз: шатун тянет ползун вверх, и верхняя стенка направляющей его удерживает.

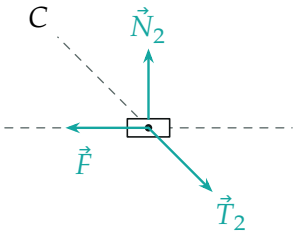


Силы, действующие на ползун A: сила $2\vec{F}$*, сила растянутого шатуна* $\vec{T}_1$ *вдоль AC и реакция направляющей* $\vec{N}_1$*.*

2. Ползун B**.** Так же по первому закону Ньютона $\vec{F} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = 0$. Теперь сила $\vec{F}$ направлена влево, а шатун BC уходит от ползуна вверх-влево, поэтому уравновесить F по оси x он может, только *толкая* ползун вдоль направления $C \to B$, то есть вниз-вправо (шатун сжат):

$$x: \quad T_2 \cos 45^\circ - F = 0 \;\Rightarrow\; T_2 = \sqrt{2}\,F;$$
$$y: \quad N_2 - T_2 \sin 45^\circ = 0 \;\Rightarrow\; N_2 = F.$$

Реакция $\vec{N}_2$ направлена вверх: шатун вдавливает ползун в нижнюю стенку.



Силы, действующие на ползун B: сила $\vec{F}$, сила сжатого шатуна $\vec{T}_2$ (вдоль CB, от шарнира) и реакция направляющей $\vec{N}_2$.

3. Шарнир C**.** По третьему закону Ньютона шатун действует на шарнир C с силой, равной по модулю силе, с которой он действует на ползун, и направленной противоположно, — ведь невесомый стержень лишь передаёт силу с одного конца на другой. Растянутый шатун AC тянет шарнир к A (вниз-влево) силой $T_1 = 2\sqrt{2}\,F$, сжатый шатун BC толкает шарнир от B (вверх-влево) силой $T_2 = \sqrt{2}\,F$. Шарнир невесом и покоится, поэтому сумма сил на него равна нулю:

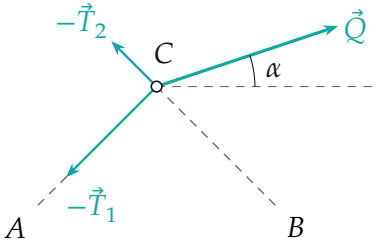
$$\vec{Q} - \vec{T}_1 - \vec{T}_2 = 0.$$

В проекциях на оси:

$$x: \quad Q_x - T_1\cos 45^\circ - T_2\cos 45^\circ = 0 \;\Rightarrow\; Q_x = 2F + F = 3F;$$

$$y: \quad Q_y - T_1\sin 45^\circ + T_2\sin 45^\circ = 0 \;\Rightarrow\; Q_y = 2F - F = F.$$

Обе проекции положительны: сила $\vec{Q}$ направлена вправо и вверх.



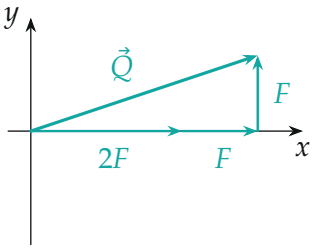
Силы, действующие на шарнир C: шатун AC тянет его к A, шатун BC

толкает его от B; сила $\vec{Q}$ их уравновешивает. Длины стрелок — в масштабе: $T_1 = 2\sqrt{2}F$, $T_2 = \sqrt{2}F$, $Q = \sqrt{10}F$.

4. Модуль и направление силы. По теореме Пифагора и через тангенс угла α с направляющими:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{(3F)^2 + F^2} = \sqrt{10}\,F, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{Q_y}{Q_x} = \frac{1}{3}.$$

Обратите внимание: силы шатунов направлены строго вдоль шатунов только потому, что шатуны невесомы и шарнирны на обоих концах. Шатун AC растянут, а BC сжат — знак силы каждого шатуна определяет направление внешней силы на его ползуне, угадывать его заранее не нужно: неверно выбранное направление дало бы отрицательную проекцию.



Сложение проекций: по x складываются вклады двух ползунов ($2F + F$), по y остаётся разность вертикальных составляющих шатунов ($2F - F$).

Проверка. Второй способ — рассмотрим всю систему «ползуны + шатуны + шарнир» целиком: силы шатунов внутренние и сокращаются, остаются внешние $2\vec{F}, \vec{F}, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{Q}$. Сумма проекций на x: $Q_x - 2F - F = 0$, то есть $Q_x = 3F$; на y: $Q_y - N_1 + N_2 = 0$, то есть $Q_y = 2F - F = F$ — то же. Предел: если бы обе силы на ползунах были равны F, получилось бы $N_1 = N_2$ и $Q_y = 0$ — шарнир надо было бы тянуть строго вдоль направляющих, как и требует симметрия механизма.

Физический смысл такой: вдоль направляющих сила $\vec{Q}$ должна компенсировать сумму внешних сил $3F$, а поперёк — разницу реакций направляющих, возникающую из-за того, что левый ползун нагружен вдвое сильнее.

Ответ. $Q = \sqrt{10}\,F$; сила направлена вправо-вверх под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 18{,}4^\circ$ к направляющим.