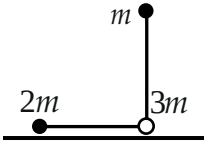
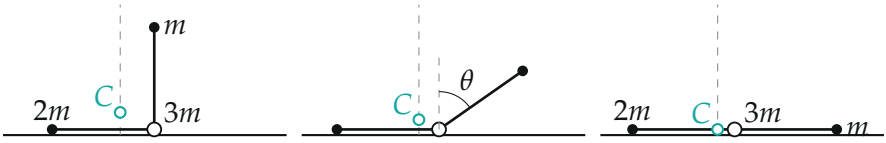
Два шарика на стержнях с шарниром

Задача 1. [ИОШ 2025/26, 11 класс, задача 1] Концы двух невесомых стержней одинаковой длины l скреплены точечным шарниром, имеющим массу $3m$. На вторые концы стержней прикреплены точечные тела с массами $2m$ и m. Стержни расположили на гладкой горизонтальной поверхности так, как показано на рисунке, а потом отпустили. Известно, что тело массой m упадёт справа от шарнира. На каком расстоянии от начального положения шарнира на поверхность упадёт тело массой m и с какой скоростью? Трение отсутствует.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Шарик m на вертикальном стержне неустойчив и падает вправо. Трения нет, поэтому у системы нет внешних горизонтальных сил: сила тяжести и реакция стола вертикальны. Центр масс не может сместиться по горизонтали и опускается строго вниз. Значит, пока шарик m уезжает вправо, шарнир с шариком $2m$ скользят по столу влево. Главные идеи задачи — закон сохранения энергии (для скорости) и неподвижность горизонтальной координаты центра масс (для места падения).



а) начало б) падение в) шарик m упал

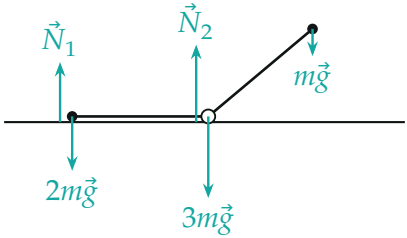
Три положения системы: стержень с шариком m падает, шарнир и шарик $2m$ уезжают влево, центр масс C идёт по вертикальной пунктирной линии и в конце оказывается на столе.

Обозначения. Начало отсчёта O — начальное положение шарнира на столе. Ось Ox направлена вправо (туда, куда падает шарик m), ось Oy — вверх. В начале шарнир в точке $(0;0)$, шарик $2m$ в точке $(-l;0)$, шарик m в точке $(0;l)$. C — центр масс всей системы (масса $6m$), x_C — его горизонтальная координата.

1. Центр масс не смещается по горизонтали. Запишем теорему о движении центра масс для всей системы, включая шарнир и стержни, в проекции на ось Ox. Силы тяжести и реакции стола вертикальны, трения нет, поэтому сумма внешних сил в проекции на Ox равна нулю:

$$6m\,a_{Cx} = 0.$$

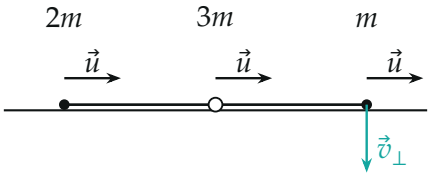
В начале всё покоилось, значит, $v_{Cx} = 0$ в любой момент, и $x_C = \text{const}$. Это и есть главная идея: положение центра масс по горизонтали известно заранее, и по нему можно найти положение остальных тел.



Внешние силы, действующие на систему в произвольный момент: силы тяжести тел и реакции стола $\vec{N}_1$ (на шарик $2m$) и $\vec{N}_2$ (на шарнир). Все они вертикальны.

2. Что происходит в момент падения. Шарик m коснулся стола. Тогда оба стержня лежат на столе на одной горизонтальной прямой: стержень с шариком m направлен вправо от шарнира, стержень с шариком $2m$ — влево. Шарик $2m$ и шарнир всё время на столе, их вертикальные скорости равны нулю. Стержни нерастяжимы, поэтому проекции скоростей концов стержня на сам стержень одинаковы. Оба стержня горизонтальны, так что горизонтальные скорости шарика $2m$, шарнира и шарика m одинаковы; обозначим их общее значение u. У шарика m есть

ещё вертикальная составляющая $v_\perp$: она перпендикулярна стержню и поэтому ничего не растягивает.



В момент падения шарика m: горизонтальные скорости всех трёх тел одинаковы ($\vec{u}$), вертикальная скорость есть только у шарика m.

Запишем закон сохранения горизонтальной проекции импульса всей системы (внешних горизонтальных сил нет):

$$2m\,u + 3m\,u + m\,u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Итак, в момент падения шарик $2m$ и шарнир покоятся, а шарик m движется строго по вертикали вниз — как и сказано в идее «центр масс идёт по вертикали».

3. Скорость шарика. Запишем закон сохранения механической энергии между началом и моментом падения: трения нет, а шарнир и стержни идеальны, поэтому работы не совершают. Из потенциальной энергии изменилась только энергия шарика m: он опустился на l. Кинетическая энергия в конце есть только у шарика m, потому что остальные покоятся:

$$mgl = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gl}.$$

Обратите внимание: v такая же, как при свободном падении с высоты l, хотя шарик движется по дуге, а не по вертикали. Так получилось потому, что вся освободившаяся энергия досталась одному шарику: в конце остальные тела неподвижны.

4. Место падения: центр масс до и после. Найдём x_C в начале по определению центра масс:

$$x_C = \frac{m\cdot 0 + 2m\cdot(-l) + 3m\cdot 0}{6m} = -\frac{l}{3}.$$

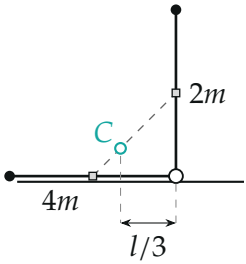
Пусть в конце шарнир находится в точке $x = X$. Шарик $2m$ лежит на расстоянии l левее шарнира, а шарик m — на расстоянии l правее (по условию он упал справа от шарнира):

$$x_C = \frac{2m(X-l) + 3mX + m(X+l)}{6m} = X - \frac{l}{6}.$$

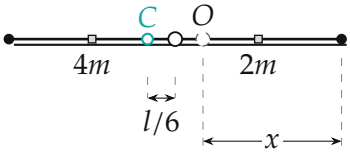
Приравнивая два выражения для x_C (по пункту 1 оно не меняется), получаем $X - l/6 = -l/3$, откуда $X = -l/6$: шарнир сдвинулся на $l/6$ влево. Шарик m упал в точку

$$x = X + l = \frac{5}{6}l.$$

Второй способ: две гантели. Заменим шарнир массой $3m$ двумя совпадающими шарнирами $2m$ и m. Тогда систему можно представить как наложение двух гантелей: «шарик $2m$ — шарнир $2m$» (масса $4m$, центр масс K_1 в середине горизонтального стержня) и «шарик m — шарнир m» (масса $2m$, центр масс K_2 в середине второго стержня). Общий центр масс лежит на отрезке K_1K_2 и делит его в отношении, обратном массам: в 2 раза ближе к K_1. В начале $K_1 = (-l/2; 0)$, $K_2 = (0; l/2)$, поэтому $C = K_1 + \frac{1}{3}\overrightarrow{K_1K_2}$ и $x_C = -\frac{l}{2} + \frac{l}{6} = -\frac{l}{3}$ — то же самое. В конце оба стержня лежат на одной прямой, K_1 и K_2 на расстоянии l друг от друга, и C отстоит от K_1 на $l/3$; расстояние от шарнира до C равно $l/2 - l/3 = l/6$ — снова $X = -l/6$.

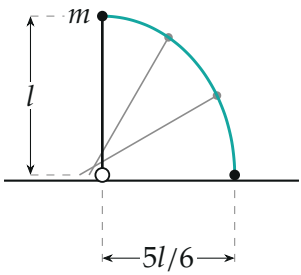


а) начало



б) шарик m упал

Центр масс на отрезке между центрами гантелей: а) в начале, б) в конце.



Путь шарика m (бирюзовая линия) — четверть эллипса $x = \frac{5}{6}\,l\sin\theta$, $y = l\cos\theta$, где θ — угол стержня с вертикалью: шарнир в это время сдвигается на $\frac{l}{6}\sin\theta$ влево. Серым показаны промежуточные положения стержня.

Обратите внимание. Ответ отсчитан от *начального* положения шарнира O, и он не равен l: шарнир успел уехать на $l/6$ влево, поэтому шарик пролетел вправо не l, а $5l/6$.

Проверка. Размерности: $[v] = \sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$, расстояние измеряется в l. Для проверки решим задачу в общем виде: шарик слева M, шарнир h, шарик справа m. Тот же ход рассуждений даёт

$$X = -\frac{ml}{M+h+m}, \qquad x = X + l = l\,\frac{M+h}{M+h+m}.$$

Если $m \ll M + h$, шарнир почти не двигается и $x \to l$ — это падение стержня на неподвижной оси, где точка падения лежит на расстоянии l. При $M = 2m$, $h = 3m$ получаем $\frac{5}{6}\,l$. Численное интегрирование движения системы (python) дало $x = 0{,}8333\,l$ и $v = 1{,}414\sqrt{gl}$ и показало, что шарнир всё время давит на стол, не отрываясь.

Смысл: центр масс стоит на месте по горизонтали, поэтому шарнир уезжает влево на $l/6$, а в момент падения вся энергия сосредоточена в вертикальном движении шарика m.

Ответ. Шарик m упадёт на расстоянии $\dfrac{5}{6}\,l$ правее начального положения шарнира, со скоростью $v = \sqrt{2gl}$, направленной вертикально вниз.