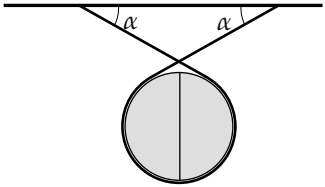
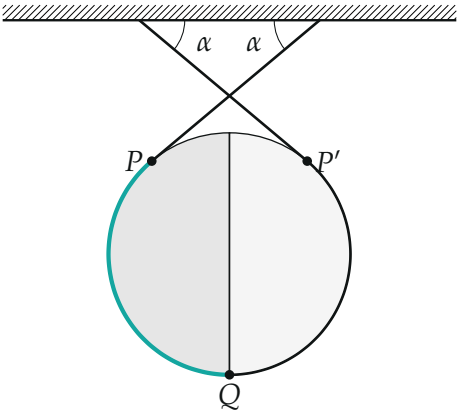
Два полуцилиндра на нити

Задача 2. [ИОШ 2025/26, 11 класс, задача 2] Два одинаковых гладких полуцилиндра массой m каждый обхватываются невесомой и нерастяжимой нитью так, как показано на рисунке. Концы нити прикреплены к горизонтальному потолку и образуют с ним углы α. Найти силу натяжения нити и силу давления одного полуцилиндра на другой.



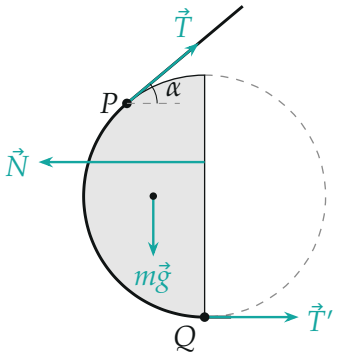
▲ **Решение. Что происходит.** Нить обхватывает оба полуцилиндра, пересекается над ними и уходит к потолку. Нить невесомая и скользит по гладким поверхностям, поэтому по всей длине её натяжение одно и то же — обозначим его T. Полуцилиндры неподвижны и прижаты плоскими гранями друг к другу. Главная идея: взять для одного полуцилиндра систему «полуцилиндр вместе с участком нити, лежащим на нём». Силы давления между нитью и поверхностью тогда становятся внутренними, а от нити остаются только две силы натяжения на концах участка. Дальше — условие равновесия в проекциях на вертикаль (даст T) и на горизонталь (даст силу давления N).



Геометрия (рисунок построен для $\alpha = 40°$). Нить, идущая от правого крепления, касается цилиндра слева в точке P и идёт по дуге вокруг нижней части; бирюзовым выделен участок PQ на левом полуцилиндре, Q — нижняя точка цилиндра, где граница между полуцилиндрами. В точках P и P' нить идёт под углом α к горизонту.

1. Система и силы. Нить касается цилиндра в точках P и P': из точки P она идёт вверх вправо, через точку пересечения, к правому креплению под углом α к горизонту (потолок горизонтален, угол нити с ним равен α). В нижней точке Q нить касается цилиндра по горизонтали. На систему «левый полуцилиндр + участок нити PQ» действуют четыре силы:

- сила тяжести $m\vec{g}$ (вертикально вниз, приложена в центре масс полуцилиндра);
- сила $\vec{N}$ со стороны правого полуцилиндра: грани гладкие, поэтому сила перпендикулярна плоской грани, то есть горизонтальна и направлена влево;
- сила натяжения $\vec{T}$ в точке P: оставшаяся часть нити тянет участок вдоль нити, вверх вправо под углом α к горизонту;
- сила натяжения $\vec{T}'$ в точке Q: оставшаяся часть нити тянет участок по касательной, вправо; $T' = T$.



Силы, действующие на левый полуцилиндр вместе с лежащим на нём участком нити PQ.

2. Условие равновесия. Система покоится, значит, сумма внешних сил равна нулю (второй закон Ньютона при $a = 0$):

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{T}' = \vec{0}.$$

Выберем ось x вправо, ось y вверх; проекции неизвестных оставим со знаком. Вертикальная проекция — в неё входят только сила тяжести и вертикальная часть силы $\vec{T}$ ($\vec{N}$ и $\vec{T}'$ горизонтальны):

$$T\sin\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

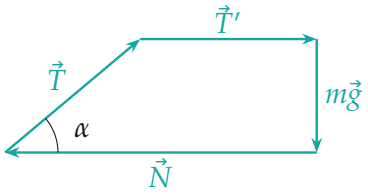
Горизонтальная проекция — в неё входят N, $T\cos\alpha$ и $T' = T$:

$$-N + T\cos\alpha + T = 0 \quad \Rightarrow \quad N = T(1+\cos\alpha) = \frac{mg\,(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$N = mg\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Здесь использовано $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$. По третьему закону Ньютона правый полуцилиндр давит на левый с силой N, а левый на правый — с такой же по модулю, то есть искомая сила давления равна N.

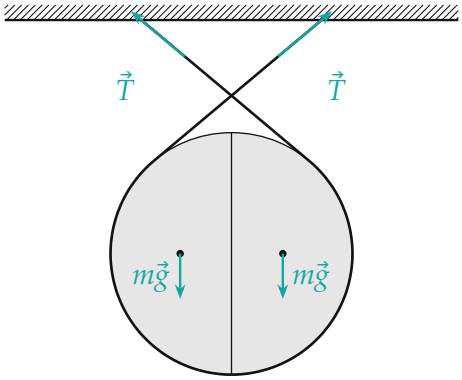


Многоугольник сил: четыре силы замыкаются. Вертикальная сторона mg равна $T\sin\alpha$; длина нижней стороны $N = T + T\cos\alpha$.

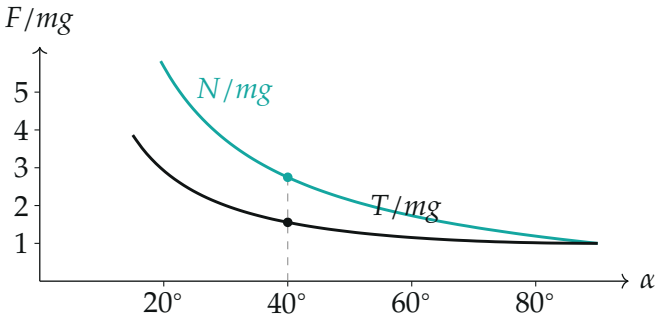
Обратите внимание: $T' = T$ потому, что нить невесома и скользит без трения по гладкой поверхности; если бы поверхности были шероховатыми, натяжение менялось бы вдоль нити. Рассматривать надо именно

участок на одном полуцилиндре, а не всю нить: так в уравнения не попадают неизвестные силы давления нити на поверхность.

Второй способ: вся система. Возьмём оба полуцилиндра и всю нить целиком; силы взаимодействия между полуцилиндрами и между нитью и ними внутренние. Внешние силы: силы тяжести $m\vec{g}$ обоих полуцилиндров (вместе $2mg$, вниз) и две силы натяжения T в местах, где нить перерезана у потолка (вдоль нити, к потолку). Вертикальная проекция: $2T\sin\alpha - 2mg = 0$ — тот же результат $T = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$. Горизонтальные проекции $T\cos\alpha$ и $-T\cos\alpha$ взаимно уничтожаются, сила N этим способом не находится (она внутренняя), поэтому для неё нужен первый способ.



Вся система: внешних сил четыре — две силы тяжести и две силы натяжения у потолка.



Зависимости T/mg и N/mg от α; точки — значения при $\alpha = 40°$: 1,56 и 2,75.

Проверка. Размерности: обе силы измеряются в единицах mg — верно. Предел $\alpha \to 90°$: нить идёт вертикально, $T = mg$ (на левый полуцилиндр по вертикали действуют только T и mg) и $N = mg\operatorname{ctg}45° = mg$; в горизонтальной проекции остаются N и $T' = T = mg$, равенство выполнено. Предел $\alpha \to 0$: $T \to \infty$ и $N \to \infty$ — положе нить, которая должна держать вес, не бывает без огромной силы.

Физический смысл: вертикальная составляющая натяжения нити держит вес полуцилиндра, а горизонтальные составляющие обоих концов участка нити вместе прижимают полуцилиндры друг к другу.

Ответ. $T = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$; сила давления одного полуцилиндра на другой $N = mg\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.