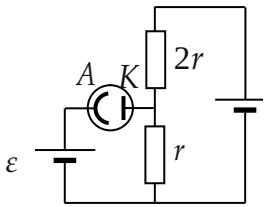
Вакуумный фотоэлемент в цепи

Задача 3. [ИОШ 2025/26, 11 класс, задача 3] Схема цепи показана на рисунке. Вакуумный фотоэлемент A–K обладает следующей вольтамперной характеристикой. Если $\varphi_A < \varphi_K$, ток через фотоэлемент не течёт (φ_A, φ_K — потенциалы электродов A и K). Если $\varphi_A > \varphi_K$, от A к K течёт ток $I_0 = 30$ мА. Найти напряжение на фотоэлементе $U_{A-K} = \varphi_A - \varphi_K$. Источники идеальны, $\varepsilon = 20$ В, $r = 50$ кОм.



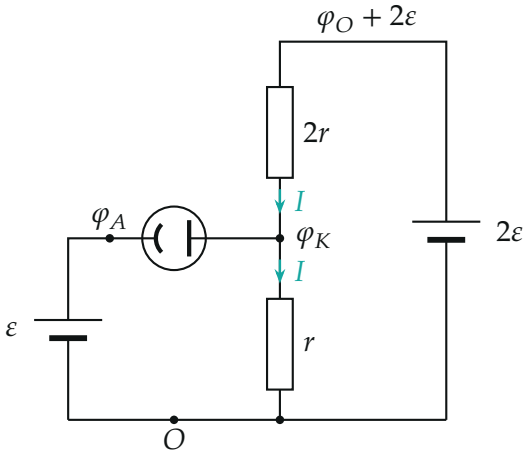
▲ **Решение. Что происходит.** Фотоэлемент — элемент с двумя состояниями: либо тока нет (при $\varphi_A < \varphi_K$), либо ток от A к K равен I_0 и не зависит от напряжения (при $\varphi_A > \varphi_K$). Класс задачи — перебор состояний: предполагаем одно состояние, находим потенциалы и проверяем условие, при котором оно возможно; при противоречии берём другое. Потенциалы удобно отсчитывать от нижнего провода O ($\varphi_O = 0$). Источники идеальны, поэтому напряжение на каждом из них равно его ЭДС: $\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon$, а верхний провод имеет потенциал $\varphi_O + 2\varepsilon$ (положительный полюс обоих источников — сверху, длинная пластина).

Замечание о числах. В условии (и у организаторов) опечатка: при $r = 50$ кОм и $I_0 = 30$ мА получилось бы $I_0 r = 1500$ В и $U_{A-K} < 0$, а официальный ответ 5,66 В соответствует $I_0 r = 1{,}5$ В (т. е. $r = 50$ Ом), поэтому формулу выводим в общем виде, а число даём для $I_0 r = 1{,}5$ В.

1. Предположение: тока через фотоэлемент нет. Тогда резисторы $2r$ и r соединены последовательно и находятся под напряжением 2ε правого источника. Ток через два последовательных резистора и потенциал узла K:

$$I = \frac{2\varepsilon}{2r + r} = \frac{2\varepsilon}{3r}, \qquad \varphi_K = \varphi_O + Ir = \varphi_O + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Сравним с потенциалом A: $\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon > \varphi_O + \frac{2}{3}\varepsilon = \varphi_K$. Значит, условие «ток не течёт» ($\varphi_A < \varphi_K$) нарушено. Предположение неверно: ток через фотоэлемент течёт, и он равен I_0.



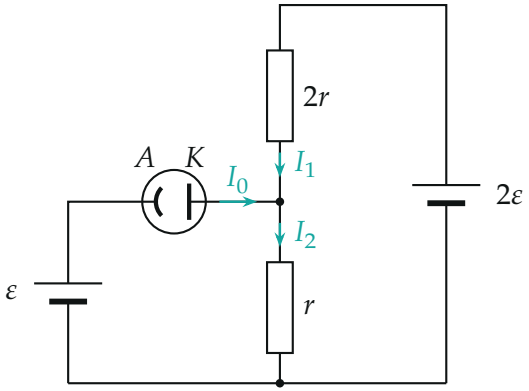
Предположение «тока через фотоэлемент нет»: через $2r$ и r течёт один и тот же ток I, потенциал узла K равен $\varphi_O + \frac{2}{3}\varepsilon$ и оказывается меньше $\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon$ — противоречие.

2. Токи и уравнения. Токи в резисторах теперь разные: ток I_1 течёт по $2r$ сверху вниз, ток I_2 — по r вниз, ток I_0 — через фотоэлемент от A к K. Закон сохранения заряда в узле K (сколько втекает, столько вытекает):

$$I_0 + I_1 = I_2.$$

Правый контур: источник 2ε создаёт между верхним проводом и O напряжение 2ε, оно равно сумме падений напряжения на $2r$ и r (закон Ома для участка, потенциал вдоль тока падает):

$$(\varphi_O + 2\varepsilon) - \varphi_K = 2r\,I_1, \qquad \varphi_K - \varphi_O = r\,I_2 \quad \Rightarrow \quad 2r\,I_1 + r\,I_2 = 2\varepsilon.$$



Токи при работающем фотоэлементе: I_0 от A к K, I_1 в резисторе $2r$, I_2 в резисторе r.

3. Решение. Неизвестных два (I_1, I_2), уравнений два. Подставим $I_1 = I_2 - I_0$ во второе:

$$2r\,(I_2 - I_0) + r\,I_2 = 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{2\varepsilon}{3r} + \frac{2}{3}\,I_0.$$

Потенциал узла K и искомое напряжение:

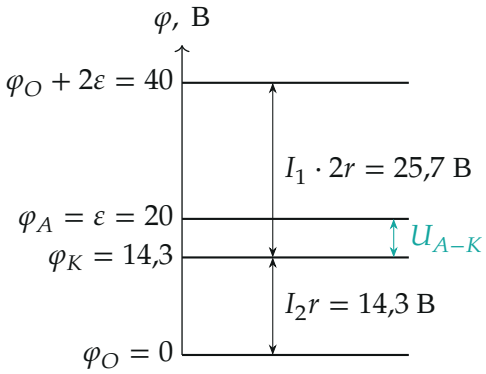
$$\varphi_K = \varphi_O + I_2 r = \varphi_O + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\,I_0 r, \qquad U_{A-K} = \varphi_A - \varphi_K = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3}\,I_0 r.$$

Для $I_0 r = 1{,}5$ В:

$$U_{A-K} = \frac{20}{3}\ \text{В} - \frac{2}{3}\cdot 1{,}5\ \text{В} = \frac{17}{3}\ \text{В} \approx 5{,}67\ \text{В}$$

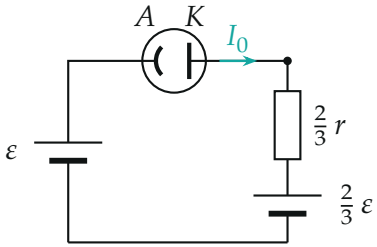
(организаторы приводят 5,66 В — число округлено вниз).

Проверка согласованности. Мы предположили, что ток течёт, то есть $U_{A-K} > 0$; получили $5{,}67\ \text{В} > 0$ — верно. Токи тоже согласованы с нарисованными направлениями: при $r = 50$ Ом $I_2 = 0{,}287$ А, $I_1 = I_2 - I_0 = 0{,}257\ \text{А} > 0$.



Потенциалы точек схемы (при $r = 50$ Ом): от нижнего провода O до верхнего потенциал растёт на $2\varepsilon = 40$ В; $\varphi_K = 14{,}3$ В, $\varphi_A = 20$ В, напряжение на фотоэлементе $U_{A-K} = 5{,}67$ В.

Второй способ: эквивалентный источник и график. Заменим всю часть схемы, подключённую к узлу K (источник 2ε с резистором $2r$ и резистор r параллельно), одним источником с ЭДС $\varepsilon_{\text{экв}}$ и сопротивлением $r_{\text{экв}}$. Если от узла K ничего не отходит, потенциал K равен $\varphi_O + \frac{2}{3}\varepsilon$ (это пункт 1), значит $\varepsilon_{\text{экв}} = \frac{2}{3}\varepsilon$; сопротивление при закороченных источниках — параллельное соединение $2r$ и r: $r_{\text{экв}} = \dfrac{2r \cdot r}{2r + r} = \dfrac{2}{3}r$.

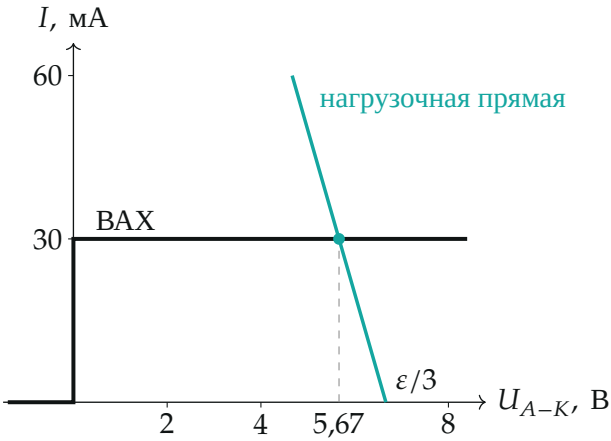


Эквивалентная схема: источник ε, фотоэлемент и эквивалентный источник $\frac{2}{3}\varepsilon$ с сопротивлением $\frac{2}{3}r$.

Пусть через фотоэлемент течёт ток I. Тогда $\varphi_K = \varphi_O + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}rI$, откуда

$$U_{A-K} = \varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{2}{3}rI = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2r}{3}I.$$

Это уравнение прямой в плоскости (U_{A-K}, I) — «нагрузочной прямой», а состояния фотоэлемента лежат на его вольтамперной характеристике: $I = 0$ при $U_{A-K} < 0$ и $I = I_0$ при $U_{A-K} > 0$. Точка пересечения даёт решение: на горизонтальном участке $I = I_0$ получаем ту же формулу $U_{A-K} = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} I_0 r$, а на участке $I = 0$ прямая даёт $U_{A-K} = \frac{\varepsilon}{3} > 0$, где характеристика тока не допускает, то есть решения там нет.



Графическое решение (для $r = 50$ Ом): вольтамперная характеристика фотоэлемента и нагрузочная прямая пересекаются при $U_{A-K} = 5{,}67$ В, $I = I_0 = 30$ мА.

Обратите внимание. Формулу $U_{A-K} = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} I_0 r$ нельзя применять вслепую: она верна, только если получилось $U_{A-K} > 0$, то есть если состояние «ток течёт» действительно возможно.

Проверка. Размерности: ε и $I_0 r$ — вольты. Предел $I_0 \to 0$: $U_{A-K} \to \varepsilon/3$ — то же, что в пункте 1 ($\varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon$). Формула верна, пока $I_0 r < \varepsilon/2 = 10$ В; здесь 1,5 В $<$ 10 В.

Смысл: ток I_0 через фотоэлемент поднимает потенциал узла K, и разность потенциалов между А и К уменьшается на $\frac{2}{3} I_0 r$.

Ответ. $U_{A-K} = \dfrac{\varepsilon}{3} - \dfrac{2}{3} I_0 r \approx 5{,}67$ В (при $I_0 r = 1{,}5$ В; организаторы: 5,66 В). Ток через фотоэлемент течёт.