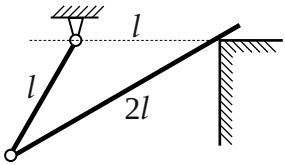
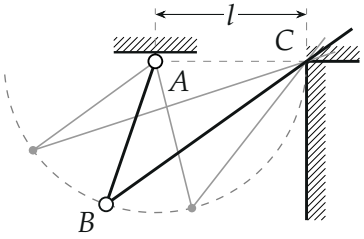
Два стержня на шарнире и точечной опоре

Задача 4. [ИОШ 2025/26, 11 класс, задача 4] Стержни, имеющие длины l и $2l$ и массы m и $2m$ соответственно, соединены шарниром. Короткий стержень подвешен шарнирно к потолку, а длинный опирается на точечную опору, расположенную на расстоянии l от точки крепления короткого стержня к потолку на одной с ней горизонтали. Найти угол, который составляет длинный стержень с горизонталью в равновесии. Трением пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** У системы одна степень свободы. Шарнир B связан с точкой подвеса A коротким стержнем и поэтому движется по окружности радиуса l с центром A, а длинный стержень обязан проходить через точку опоры C: положение B определяет положение всей системы. Достаточно одного параметра — угла α длинного стержня с горизонталью. Опора точечная и гладкая, шарниры идеальны, трения нет, поэтому силы реакций работы не совершают (реакция опоры перпендикулярна стержню, а стержень скользит вдоль себя). Тогда равновесие — это положение, где потенциальная энергия силы тяжести минимальна. Класс задачи: равновесие системы с одной степенью свободы; ключевой закон — условие минимума потенциальной энергии.

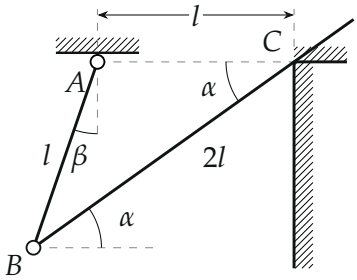
Обозначения. A — точка подвеса на потолке, B — шарнир между стержнями, C — точка опоры на одной горизонтали с A, $AC = l$. α — угол длинного стержня с горизонталью, β — угол короткого стержня с вертикалью. Потенциальную энергию отсчитываем от горизонтали, проходящей через A и C; g — ускорение свободного падения.



Одна степень свободы: шарнир B идёт по пунктирной окружности радиуса l вокруг A, а длинный стержень всегда проходит через C (серые положения при $\alpha = 18°$ и $52°$). Чёрным — равновесное положение, которое мы найдём.

1. Геометрия: связь β и α. В треугольнике ABC стороны $AB = AC = l$ (короткий стержень и расстояние до опоры), значит, он равнобедренный и углы при основании BC равны. Угол при C между горизонтальной стороной CA и длинным стержнем равен α (это и есть угол стержня с горизонталью), поэтому угол при B тоже α, а при вершине A — $\pi - 2\alpha$. Угол $\pi - 2\alpha$ складывается из прямого угла между горизонталью и вертикалью и угла β между AB и вертикалью:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \qquad \cos\beta = \sin 2\alpha, \qquad \sin\beta = \cos 2\alpha.$$



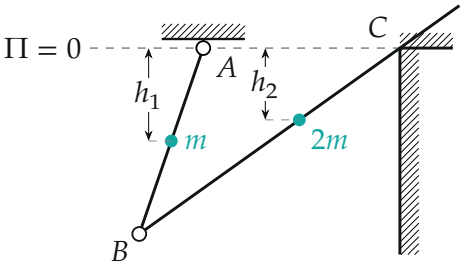
Геометрия равновесия (рисунок построен для $\alpha = 35{,}5°$): $AB = AC = l$, длинный стержень длиной $2l$ проходит через C и выступает за опору. Углы при B и C равны α, угол β отсчитан от вертикали.

2. Потенциальная энергия. Однородный стержень можно заменить материальной точкой его массы в центре стержня. Пусть K_1 — середина короткого стержня (масса m), K_2 — середина длинного (масса $2m$).

Глубины этих точек под уровнем A:

$$h_1 = \frac{l}{2}\cos\beta = \frac{l}{2}\sin 2\alpha, \qquad h_2 = l\cos\beta - l\sin\alpha = l\,(\sin 2\alpha - \sin\alpha).$$

Для h_2: B ниже A на $l\cos\beta$, а середина длинного стержня поднята над B на $l\sin\alpha$.



Потенциальная энергия: центры стержней K_1 (m) и K_2 ($2m$) лежат ниже уровня $\Pi = 0$ на h_1 и h_2.

Энергия точек, лежащих ниже нулевого уровня, отрицательна:

$$\Pi = -mgh_1 - 2mgh_2 = -\frac{mgl}{2}\sin 2\alpha - 2mgl\,(\sin 2\alpha - \sin\alpha),$$

$$\Pi = -\frac{5}{2}\,mgl\sin 2\alpha + 2\,mgl\sin\alpha.$$

3. Минимум. Равновесию соответствует $d\Pi/d\alpha = 0$:

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = -5mgl\cos 2\alpha + 2mgl\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\cos 2\alpha = 2\cos\alpha.$$

Подставим $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$:

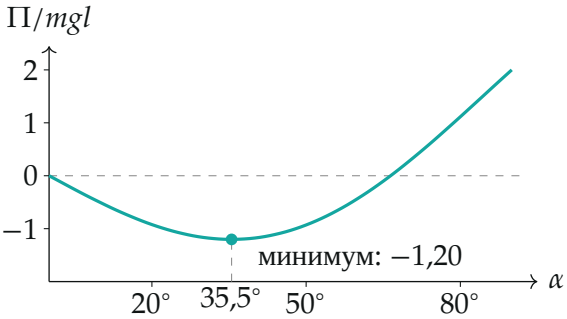
$$10\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 5 = 0, \qquad \cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{51}}{10}.$$

Корень со знаком минус отрицателен и отвечает $\alpha > 90°$; угол стержня

с горизонталью острый. Остаётся

$$\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{51}}{10} \approx 0{,}814 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{1+\sqrt{51}}{10} \approx 35{,}5^\circ.$$

Это минимум: $\dfrac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = mgl\,(10\sin 2\alpha - 2\sin\alpha) \approx 8{,}3\,mgl > 0$, равновесие устойчивое. При этом $\beta \approx 19^\circ > 0$ и $BC = 2l\cos\alpha \approx 1{,}63\,l < 2l$: стержень действительно лежит на опоре.



Потенциальная энергия системы в зависимости от угла α (в единицах mgl, рассчитана по формуле пункта 2): единственный минимум при $\alpha = 35{,}5^\circ$.

Второй способ: условия равновесия сил и моментов. Для длинного стержня выберем точку B и запишем правило моментов: сила тяжести $2m\vec{g}$ приложена в K_2 с плечом $l\cos\alpha$ относительно B, а реакция опоры $\vec{N}$ перпендикулярна стержню и приложена в C на расстоянии $BC = 2l\cos\alpha$ от B, поэтому плечо её равно BC. Неизвестная сила со стороны шарнира $\vec{R}$ момента относительно B не создаёт:

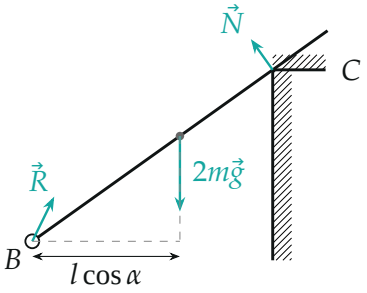
$$N \cdot 2l\cos\alpha = 2mg \cdot l\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad N = mg.$$

Для всей системы возьмём моменты относительно A: реакция подвеса $\vec{R}_A$ момента не создаёт. Реакция $\vec{N}$ направлена вверх–влево, перпендикулярно стержню; её плечо относительно A равно $l\cos\alpha$ (расстояние от A до линии действия $\vec{N}$). Вес короткого стержня приложен слева от A с плечом $a_1 = \frac{l}{2}\sin\beta$ и вращает систему против часовой стрелки, как и

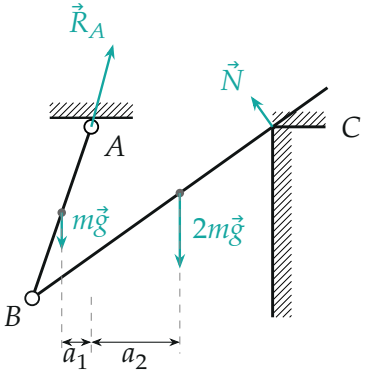
$\vec{N}$; вес длинного — справа, с плечом $a_2 = l\,(\cos\alpha - \sin\beta)$, по часовой:

$$N\,l\cos\alpha + mg\,\frac{l}{2}\sin\beta = 2mg\,l\,(\cos\alpha - \sin\beta).$$

Подставим $N = mg$ и сократим на mgl: $\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta = 2\cos\alpha - 2\sin\beta$, то есть $\frac{5}{2}\sin\beta = \cos\alpha$. С учётом $\sin\beta = \cos 2\alpha$ получаем $5\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$ — то же уравнение, что и в энергетическом способе.



а) длинный стержень



б) вся система

а) Силы на длинный стержень: $\vec{R}$ (вверх–вправо) найдена из равновесия. б) Вся система: $\vec{R}_A$ момента относительно A не создаёт; стрелки в масштабе.

Обратите внимание: центр длинного стержня лежит на расстоянии l от шарнира B вдоль стержня, а опора C — не посередине, а на расстоянии $2l\cos\alpha \approx 1{,}63\,l$ от B.

Проверка. Подстановка: $5\cos 2\alpha = 5 \cdot 0{,}3256 = 1{,}628$ и $2\cos\alpha = 1{,}628$ — уравнение выполнено. Два независимых способа (минимум энергии и моменты сил) дают одно и то же уравнение; $N = mg > 0$, то есть опора действительно давит на стержень снизу, и он на ней лежит. Численная минимизация $\Pi(\alpha)$ на отрезке $0 < \alpha < 90^\circ$ (python) даёт тот же угол $35{,}50^\circ$ и $\Pi_{\min} = -1{,}202\,mgl$.

Смысл: из положений, допускаемых связями, система выбирает то, где её центр тяжести ниже всего.

Ответ. $\alpha = \arccos\dfrac{1+\sqrt{51}}{10} \approx 35{,}5^\circ$.