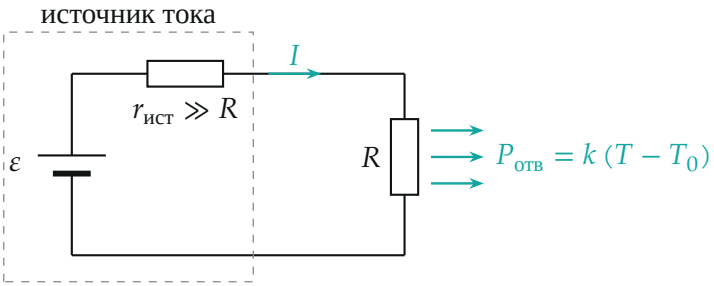
Перегорание проволочного резистора

Задача 5. [ИОШ 2025/26, 11 класс, задача 5] Сопротивление проволочного резистора при очень малом токе составляет $R_0 = 10$ Ом, а его температура практически равна температуре окружающей среды. Увеличиваем ток через резистор и устанавливаем его $I_1 = 1$ А. Сопротивление резистора возрастает до значения $R_1 = 27$ Ом и далее перестаёт меняться. При каком токе резистор перегорит? Известно, что сопротивление резистора R зависит от температуры T по закону $R = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$, где R_0 — сопротивление резистора при температуре T_0, α — температурный коэффициент сопротивления. Мощность теплоотдачи от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающей среды. Сопротивление источника тока много больше сопротивления резистора.



Поясняющий рисунок: резистор R включён в цепь источника с большим внутренним сопротивлением, ток I задаётся источником; выделяющееся в резисторе тепло уходит в окружающую среду с мощностью $k\,(T - T_0)$.

▲ **Решение. Что происходит.** Источник с очень большим внутренним сопротивлением — это источник тока: сила тока в цепи равна $\varepsilon/(r_{ист} + R) \approx \varepsilon/r_{ист}$ и не зависит от R. Значит, мы задаём ток независимо от того, как нагрелся и изменился резистор. Тепловыделение I^2R нагревает резистор, его сопротивление растёт, и тепла выделяется ещё больше — это положительная обратная связь. Отвод тепла $k\,(T - T_0)$ при этом растёт с температурой линейно. Пока отвод «круче» тепловыделения, температура устанавливается; при некотором токе равновесия нет, температура

растёт без предела, и резистор перегорает. Класс задачи: тепловой баланс с обратной связью. Данные R_0, I_1, R_1 позволяют найти отношение α/k, а оно и определяет предельный ток.

Обозначения. T_0 — температура окружающей среды, $\theta = T - T_0$ — перегрев резистора, k — коэффициент теплоотдачи (мощность отвода $P_{\text{отв}} = k\theta$), I — ток через резистор, $R = R_0(1+\alpha\theta)$ — его сопротивление при перегреве θ.

1. Установившийся режим. Рассмотрим момент, когда температура и сопротивление перестали меняться: мощность тепловыделения равна мощности теплоотдачи. Закон Джоуля — Ленца для резистора и закон теплоотдачи дают

$$I^2 R_0\,(1 + \alpha\theta) = k\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{I^2 R_0}{k - \alpha I^2 R_0}.$$

Обратите внимание: это уравнение верно только для установившегося состояния; существует ли оно, разберём дальше.

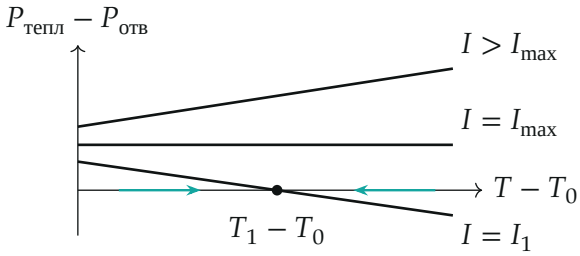
2. Когда установившегося режима нет. Перегрев θ положителен и конечен, только пока $k - \alpha I^2 R_0 > 0$. Разность мощностей тепловыделения и отвода:

$$I^2 R_0(1 + \alpha\theta) - k\theta = I^2 R_0 + (\alpha I^2 R_0 - k)\theta.$$

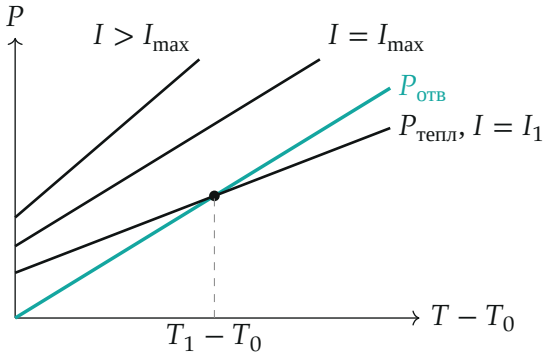
Если $\alpha I^2 R_0 \geq k$, то при любом θ эта разность не меньше $I^2 R_0 > 0$: нагрев не останавливается, температура растёт, и резистор перегорает. Значит, критический ток

$$I_{\max}^2 = \frac{k}{\alpha R_0}.$$

Графически: тепловыделение — прямая с наклоном $\alpha I^2 R_0$ и отрезком $I^2 R_0$ на оси мощности, отвод — прямая $k\theta$ через начало; при $I < I_{\max}$ они пересекаются, при $I = I_{\max}$ параллельны.



Разность мощностей тепловыделения и отвода как функция перегрева. При $I = I_1$ она положительна левее точки $T_1 - T_0$ (температура растёт) и отрицательна правее (падает): равновесие устойчиво. При $I \geq I_{\max}$ разность положительна при любом T.



Баланс мощностей: отвод $P_{отв} = k\theta$ (бирюзовая прямая) и тепловыделение $P_{тепл} = I^2 R_0(1 + \alpha\theta)$ при трёх токах; при $I \geq I_{\max}$ пересечения нет.

3. Что известно из опыта. При токе I_1 установился перегрев θ_1 и сопротивление $R_1 = R_0(1 + \alpha\theta_1)$. Баланс мощностей при токе I_1 и установившемся сопротивлении R_1: $I_1^2 R_1 = k\theta_1$. Выразим θ_1 из этого уравнения и из $R_1 = R_0(1 + \alpha\theta_1)$ и приравняем:

$$\theta_1 = \frac{R_1 - R_0}{\alpha R_0} = \frac{I_1^2 R_1}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{k} = \frac{R_1 - R_0}{R_0 R_1 I_1^2}.$$

По числам $\alpha/k = 17/(10 \cdot 27)$ Вт$^{-1} \approx 0{,}063$ Вт$^{-1}$, но по отдельности α и k неизвестны — и не нужны.

4. Критический ток. Подставим α/k в $I_{\max}^2 = k/(\alpha R_0)$ (матрёшка: $I_{\max} \to k/\alpha \to R_0, R_1, I_1$):

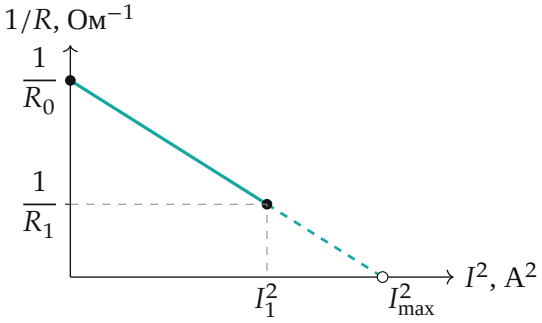
$$I_{\max}^2 = \frac{R_0 R_1 I_1^2}{R_0\,(R_1 - R_0)} = \frac{R_1}{R_1 - R_0}\,I_1^2,$$

$$I_{\max} = I_1\sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_0}} = 1\text{ А}\cdot\sqrt{\frac{27}{17}} \approx 1{,}26\text{ А}.$$

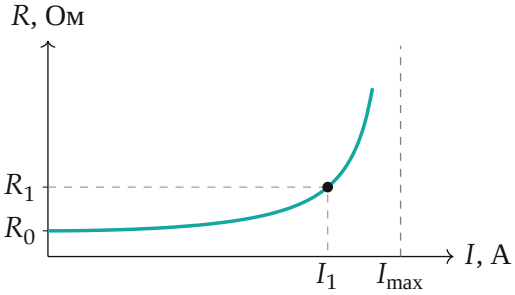
Второй способ: сопротивление как функция тока. Из $I^2R = k\theta$ и $R = R_0 + R_0\alpha\theta$ исключим θ: $R = R_0 + \dfrac{\alpha R_0}{k}\,I^2 R$, откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}\Big(1 - \frac{\alpha R_0}{k}\,I^2\Big) = \frac{1}{R_0}\Big(1 - \frac{I^2}{I_{\max}^2}\Big).$$

Величина $1/R$ — линейная функция I^2: прямая, проходящая через точку $(0;\ 1/R_0)$ и точку опыта $(I_1^2;\ 1/R_1)$ и обращающаяся в нуль (то есть $R \to \infty$) при $I^2 = I_{\max}^2$. Продлив прямую до пересечения с осью, получаем $I_{\max}^2$ без всяких α и k.



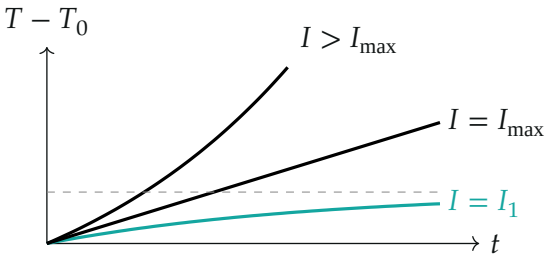
Выпрямление: $1/R$ *как функция* I^2 *— прямая; её пересечение с осью* I^2 *даёт* $I_{\max}^2 \approx 1{,}59\ A^2$.



Сопротивление резистора как функция тока, $R(I) = R_0/(1 - I^2/I_{\max}^2)$ (формула второго способа): точка $(I_1, R_1) = (1\ А, 27\ Ом)$ лежит на кривой, при $I \to I_{\max}$ сопротивление и температура растут неограниченно.

Числа: $1/R_0 = 0{,}100$ и $1/R_1 = 0{,}037$ Ом$^{-1}$, наклон $-0{,}063$, нуль при $I^2 = 0{,}100/0{,}063 \approx 1{,}59$ А^2, то есть $I_{\max} \approx 1{,}26$ А.

Во времени (качественно). С теплоёмкостью C: $C\,d\theta/dt = I^2 R_0(1 + \alpha\theta) - k\theta$. При $I < I_{\max}$ перегрев выходит на постоянное значение, при $I \geq I_{\max}$ растёт без предела.



Нагрев во времени для трёх значений тока (численное решение уравнения $C\,d\theta/dt = P_{тепл} - P_{отв}$, масштабы условные).

Проверка. Размерности: $I_{\max}$ — в амперах. Предельные случаи: если $R_1 \to R_0$ (при токе I_1 сопротивление почти не выросло), то $I_{\max} \to \infty$ — до перегорания ещё далеко; если $R_1 \to \infty$, то $I_{\max} \to I_1$ — резистор уже на пороге. Формула $R(I)$ при $I = I_1$ даёт $10/(1 - 17/27) = 27$ Ом — опыт воспроизведён. Численное интегрирование нагрева (python) для $I = 1{,}25$ А даёт установление, для $I = 1{,}27$ А — неограниченный рост.

Ответ. $I_{\max} = I_1\sqrt{\dfrac{R_1}{R_1 - R_0}} \approx 1{,}26$ А.