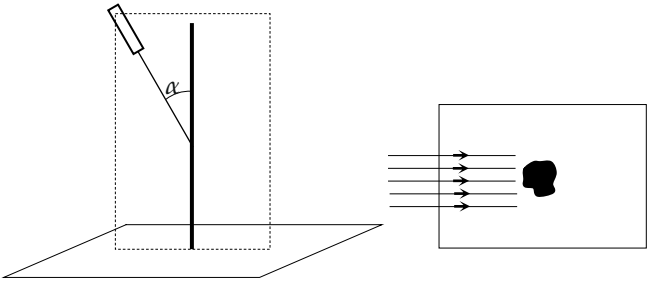
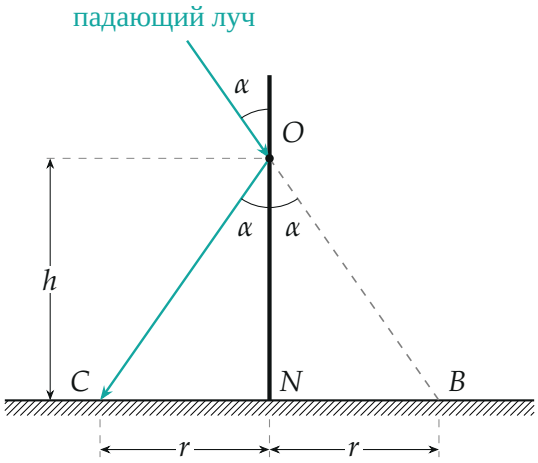
Лазерный луч на зеркальном стержне

Задача 6. [ИОШ 2025/26, 11 класс, задача 6] На столе стоит вертикальный тонкий стержень с сечением неправильной формы. На стержень под углом α падает луч лазерной указки, ширина которого больше сечения стержня (левый рисунок; пунктиром дана вертикальная плоскость, в которой лежат луч и стержень). На правом рисунке крупно показан вид сверху: световые лучи — тонкие линии, горизонтальное сечение стержня — чёрное пятно неправильной формы. Стержень обладает отражающей боковой поверхностью и отражает свет указки. Какой будет форма светлой области на столе, в которую попадут лучи? Считая, что точка падения света на проволоку находится на высоте h над столом, найти геометрические параметры этой области.



▲ **Решение. Что происходит.** Боковая поверхность стержня вертикальна, поэтому в любой её точке нормаль горизонтальна. При отражении от поверхности меняется только составляющая направления луча вдоль нормали: вертикальная составляющая направления (луч идёт вниз) остаётся прежней, а горизонтальная — отражается, оставаясь той же длины. Значит, любой отражённый луч, как и падающий, идёт вниз под углом α к вертикали, и за спуск с высоты h он уходит от стержня на расстояние $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ по горизонтали — но в разные стороны, в зависимости от того, как повёрнут «кусочек» поверхности. Все точки падения лежат на окружности радиуса $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ вокруг стержня. Главная идея — симметрия: отражение сохраняет угол с вертикалью.



Вид сбоку, плоскость луча и стержня. Для нормали, направленной точно навстречу лучу, отражённый луч OC симметричен продолжению OB падающего луча (без отражения). Оба составляют с вертикалью угол α и приходят в точки на расстоянии $r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ от основания N.

Обозначения. N — основание стержня на столе, O — точка падения на высоте h. Размеры сечения стержня считаем малыми по сравнению с $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (стержень «тонкий»), расстояния на столе отсчитываем от оси стержня. Единичный вектор направления падающего луча $\vec{d} = (\sin\alpha;\, 0;\, -\cos\alpha)$: ось z вверх, ось x — по горизонтальной составляющей луча, она направлена в сторону тени стержня.

1. Закон отражения для вектора. Для зеркальной площадки с единичной нормалью $\vec{n}$ (направленной наружу, к падающему лучу) направление отражённого луча

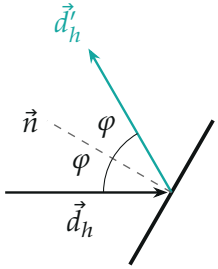
$$\vec{d}\,' = \vec{d} - 2(\vec{d}\cdot\vec{n})\,\vec{n}.$$

Поверхность вертикальна, значит $\vec{n}$ горизонтальна: $n_z = 0$. Тогда $\vec{d}\cdot\vec{n}$ содержит только горизонтальные составляющие, и в проекции на ось z

$$d'_z = d_z = -\cos\alpha, \qquad \vec{d}_h\,' = \vec{d}_h - 2(\vec{d}_h\cdot\vec{n})\,\vec{n}, \quad |\vec{d}_h\,'| = |\vec{d}_h| = \sin\alpha.$$

Вертикальная составляющая не меняется, а горизонтальная только поворачивается на угол, зависящий от ориентации площадки: отражение

сохраняет её длину.



Вид сверху на отражение горизонтальной составляющей: от касательной площадки (чёрная линия) $\vec{d}_h$ отражается в $\vec{d}_h\,'$, углы с нормалью $\vec{n}$ равны (φ), длины равны $\sin\alpha$.

2. Куда придёт отражённый луч. Отражённый луч идёт из точки O с вектором направления $\vec{d}\,'$. До стола ему лететь h вниз, то есть параметр пути $s = h/\cos\alpha$; за это время по горизонтали он проходит

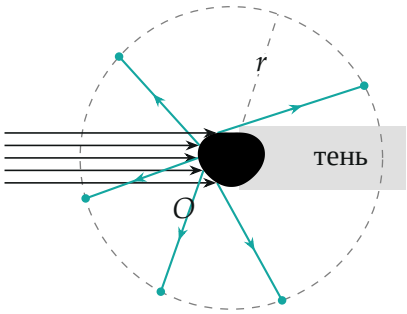
$$s\,|\vec{d}_h\,'| = \frac{h}{\cos\alpha}\,\sin\alpha = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

независимо от направления $\vec{n}$. Значит, расстояние от точки падения на стол до основания стержня всегда равно

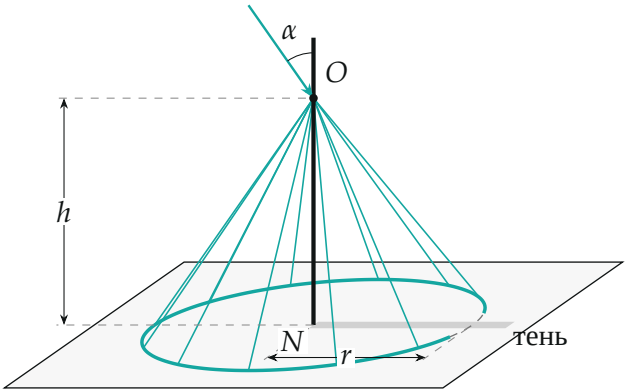
$$r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

а направление определяется только тем, куда смотрит нормаль.

3. Какая часть окружности освещена. Нормаль к освещённой поверхности образует с направлением, обратным $\vec{d}_h$, угол меньше 90°. Для нормали с азимутом ψ (отсчёт от направления луча, $90^\circ < \psi < 270^\circ$) азимут отражённого луча равен $2\psi + 180^\circ$: при изменении ψ от 90° до 270° он пробегает весь круг. Значит, отражённые лучи попадают во все направления, и светлая область — окружность с центром в основании стержня и радиусом $r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Полностью замкнуть её мешает сам стержень: за ним по ходу падающего луча лежит область геометрической тени, куда лучи не попадают, поэтому окружность неполная (узкая полоса вдоль тени разомкнута; чем тоньше стержень, тем она уже).



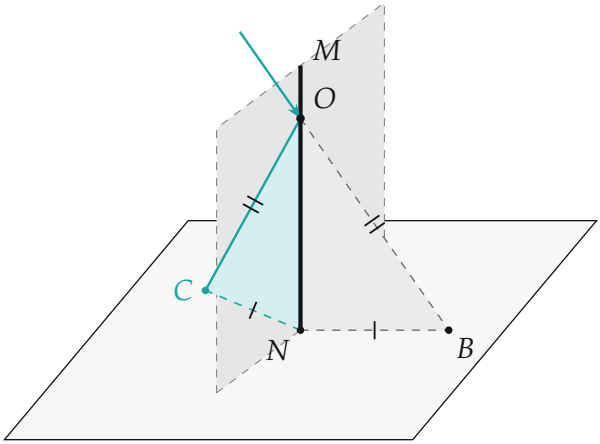
Вид сверху: пять падающих лучей (чёрные) отражаются в разные стороны (бирюзовые, длина каждого — r) и приходят на окружность радиуса r; за стержнем — полоса его тени. Размер пятна увеличен.



Все отражённые лучи выходят из точки O и образуют конус с осью — стержнем и углом α между образующей и осью; на столе он высекает окружность радиуса r (бирюзовая линия). Пунктиром отмечена часть окружности в области тени.

Второй способ: равные треугольники. Рассмотрим «кусочек» поверхности, содержащий точку O, и вертикальную прямую MN на нём, проходящую через O (она совпадает с самим стержнем). Пусть B — точка стола, куда пришёл бы луч без отражения (продолжение OB падающего луча), а C — точка стола, куда пришёл отражённый луч OC. Плоскость площадки (она содержит MN) — плоскость зеркальной симметрии, в которой OB и OC зеркально отражаются друг в друга. Поэтому

треугольники ONB и ONC равны: у них общая сторона $ON = h$, угол при N прямой (стержень вертикален, NB и NC лежат на столе), и $OB = OC$ как зеркальные отрезки. Из равенства $NC = NB$, а $NB = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ из прямоугольного треугольника ONB с углом α при O (продолжение луча идёт под углом α к вертикали).



Равные треугольники ONB и ONC: плоскость площадки (серая) содержит вертикаль MN и является плоскостью симметрии; B и C — зеркальные отражения друг друга, поэтому $NB = NC$ и $OB = OC$ (равные засечки).

Обратите внимание: если свет падает на стержень на разных высотах h (например, широкий луч освещает его по всей длине), то для каждой высоты получится своя окружность радиуса $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, и светлая область заполнит кольцо между $h_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $h_2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Для одной точки h — окружность.

Проверка. Размерность: r — длина. Предельные случаи: $\alpha \to 0$ (луч идёт вдоль стержня, отражения от вертикальной поверхности нет) даёт $r \to 0$; $\alpha \to 90^\circ$ (луч почти горизонтален) — $r \to \infty$, как и должно быть. Численный перебор 100 000 случайных нормалей (python) для $\alpha = 35^\circ$, $h = 3{,}2$ даёт расстояние $r = 2{,}2407$ с точностью 10^{-15} для всех.

Ответ. Светлая область — окружность (дуга) радиуса $r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ с центром в основании стержня; полностью её замкнуть не позволяет область тени за стержнем.