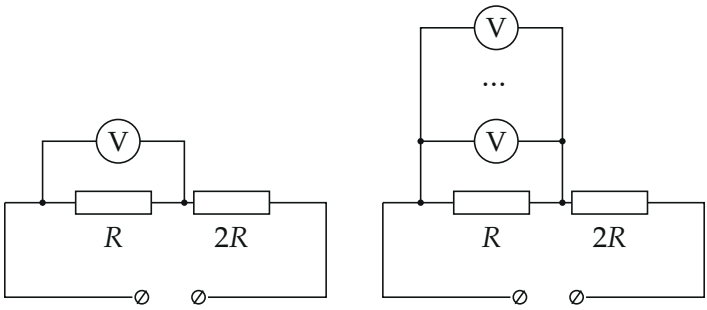
Неидеальные вольтметры в цепи

Задача 5. [ИОШ 2025/26, 9 класс, задача 5] В электрической цепи, схема которой дана на левом рисунке, к идеальному источнику напряжения $U = 36$ В подключают два резистора R и $2R$. Параллельно с первым резистором включают вольтметр, который показывает напряжение $U_0 = 11{,}5$ В. Какими будут показания последнего вольтметра, если подключить к этому резистору параллельно 10 одинаковых вольтметров?



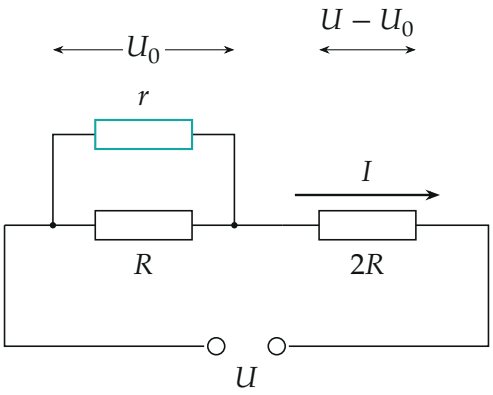
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на неидеальный измерительный прибор. Идеальный вольтметр тока не берёт, и на R было бы $U/3 = 12$ В (делитель $R : 2R$). Он показывает 11,5 В — меньше. Значит, у вольтметра конечное сопротивление r: подключённый параллельно R, он уменьшает сопротивление участка и «отбирает» напряжение. По одному показанию найдём r, а десять вольтметров параллельно — это одно сопротивление $r/10$.

Обозначения. r — сопротивление одного вольтметра; $R_{\text{уч}}$ — сопротивление участка «резистор R и вольтметры параллельно»; I — ток через источник; U_{10} — искомое показание при десяти вольтметрах.

1. Эквивалентная схема. Вольтметр показывает напряжение на своих зажимах, а сам ведёт себя как резистор r. Участок из R и r, соединённых параллельно (одно и то же напряжение, токи складываются), имеет сопротивление

$$R_{\text{уч}} = \frac{rR}{r+R}.$$

Последовательно с ним — $2R$; ток I через оба одинаков.



Вольтметр — резистор r, включённый параллельно R. Напряжение источника делится между участком $R \parallel r$ и резистором $2R$.

2. Сопротивление вольтметра. Закон Ома для всей цепи и для участка: напряжения на последовательных участках относятся как их сопротивления (ток общий):

$$\frac{U_0}{U - U_0} = \frac{R_{\text{уч}}}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{уч}} = \frac{2RU_0}{U - U_0}.$$

Из $\dfrac{1}{R_{\text{уч}}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}$:

$$\frac{1}{r} = \frac{U - U_0}{2RU_0} - \frac{1}{R} = \frac{U - 3U_0}{2RU_0} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2U_0R}{U - 3U_0} = \frac{23}{1{,}5}\,R \approx 15{,}3\,R.$$

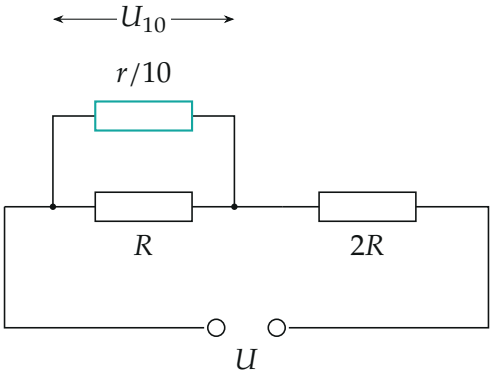
Знак: $U - 3U_0 = 1{,}5\ \text{В} > 0$, то есть $U_0 < U/3$, как и должно быть у неидеального вольтметра.

3. Десять вольтметров. Десять одинаковых сопротивлений r параллельно — это $r/10$. Каждый вольтметр показывает одно и то же напряжение U_{10} — напряжение на всём участке. Проводимости параллельных ветвей складываются:

$$\frac{1}{R'_{\text{уч}}} = \frac{1}{R} + \frac{10}{r} = \frac{1}{R} + \frac{10(U - 3U_0)}{2RU_0} = \frac{10U - 28U_0}{2RU_0},$$

$$R'_{\text{уч}} = \frac{2RU_0}{10U - 28U_0} = \frac{23}{38}R \approx 0{,}61\,R.$$

Участок стал заметно «мягче», чем R: десять вольтметров вместе сравнимы с самим резистором.



Десять вольтметров параллельно заменяем одним резистором $r/10 \approx 1{,}53R$.

4. Показание. Отношение напряжений на последовательных участках снова равно отношению сопротивлений:

$$\frac{U_{10}}{U - U_{10}} = \frac{R'_{\text{уч}}}{2R} = \frac{U_0}{10U - 28U_0}.$$

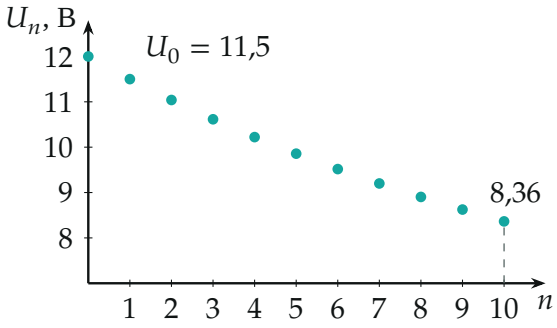
Перемножим крест-накрест: $U_{10}(10U - 28U_0) = U_0U - U_0U_{10}$, откуда

$$U_{10} = \frac{UU_0}{10U - 27U_0} = \frac{36 \cdot 11{,}5}{360 - 310{,}5}\ \text{В} = \frac{414}{49{,}5}\ \text{В} \approx 8{,}36\ \text{В}.$$

5. Сколько вольтметров — такое и показание. Тот же расчёт для n вольтметров даёт

$$U_n = \frac{UU_0}{nU - 3(n-1)U_0}.$$

При $n = 1$ это U_0, при $n = 0$ (вольтметров нет) — $U/3 = 12$ В. С каждым новым вольтметром показание падает:



Показание вольтметров в зависимости от их числа n (точки — расчёт по формуле для U_n). При $n = 0$ — напряжение на R без приборов, $U/3 = 12$ В.

Обратите внимание. Сопротивление вольтметра $r \approx 15R$ велико, и один прибор почти не искажает картину (11,5 вместо 12 В). Но десять таких приборов параллельно — уже $1{,}5R$, и ошибка измерения вырастает до 3,6 В: «почти идеальный» вольтметр перестаёт быть идеальным, если их много.

Проверка. Размерность: $\frac{UU_0}{10U-27U_0}$ — вольты. Предел: идеальные вольтметры $U_0 = U/3$ дают $U_{10} = \frac{U^2/3}{10U-9U} = \frac{U}{3}$ — десять идеальных приборов ничего не меняют. Второй способ (python, через сопротивления): $R'_{\text{уч}} = 0{,}6053R$, $U_{10} = U\frac{0{,}6053}{0{,}6053+2} = 8{,}364$ В — совпадает.

Ответ. $U_{10} = \dfrac{UU_0}{10U - 27U_0} \approx 8{,}36$ В.

Смысл: прибор измеряет не «то, что было», а то, что стало после его подключения; каждый лишний вольтметр шунтирует резистор и уменьшает напряжение на нём.

Ответ. $U_{10} = \dfrac{UU_0}{10U - 27U_0} \approx 8{,}36$ В.