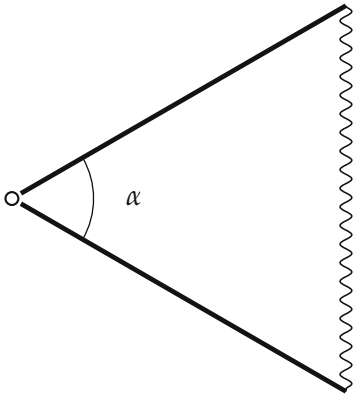
Два стержня и пружина на столе

Задача 6. [ИОШ 2025/26, 9 класс, задача 6] Два одинаковых однородных стержня OA и OB длиной l связаны шарнирно и расположены на гладком горизонтальном столе (см. рисунок; вид сверху). Стержни удерживают так, что угол между ними составляет $\alpha = 60°$, к их концам прикрепляют невесомую пружину, длина которой в недеформированном состоянии равна $1{,}1\,l$, а затем отпускают. Найти максимальное смещение шарнира в процессе движения стержней.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон движения центра масс. Стол гладкий, по горизонтали на систему «два стержня и пружина» внешние силы не действуют, а вначале всё покоится. Значит, центр масс системы всё время стоит на месте, и движение шарнира — это его движение относительно неподвижного центра масс. Остаётся найти два крайних положения системы; их даст закон сохранения энергии.

Обозначения. C — центр масс системы; $\theta = \alpha/2$ — угол каждого стержня с биссектрисой; d — расстояние от шарнира O до точки C; L — длина пружины ($L = AB$); $L_0 = 1{,}1\,l$ — её длина без деформации; ось x — по биссектрисе угла от шарнира к пружине.

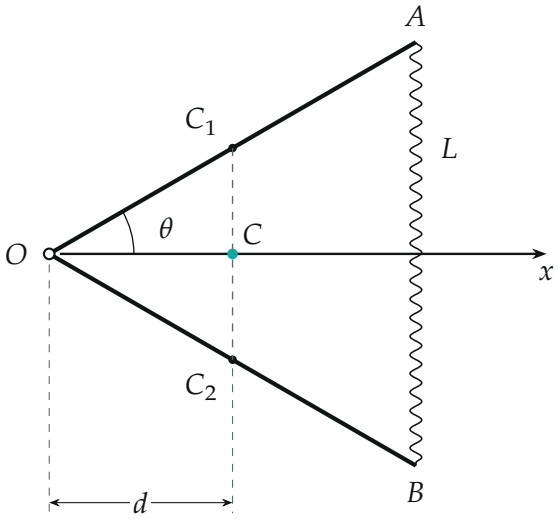
1. Где центр масс. Пружина невесома, поэтому центр масс системы — это центр масс двух одинаковых стержней, то есть середина отрезка между их центрами C_1 и C_2. Центры стержней находятся на расстоянии

$l/2$ от O под углами $\pm\theta$ к биссектрисе; середина C_1C_2 лежит на биссектрисе на расстоянии

$$d = \frac{l}{2}\cos\theta$$

от шарнира. Длина пружины — расстояние между концами стержней:

$$L = 2l\sin\theta.$$



Центр масс C — середина отрезка между центрами стержней C_1 и C_2; он на биссектрисе на расстоянии $d = \frac{l}{2}\cos\theta$ от шарнира.

2. Центр масс неподвижен. Теорема о движении центра масс: ускорение центра масс определяется только внешними силами. Сила тяжести и реакция гладкого стола вертикальны и уравновешены, горизонтальных внешних сил нет, начальная скорость центра масс нулевая. Значит, C всё время на месте. Пружина действует на стержни одинаково, система симметрична относительно биссектрисы, поэтому и движение симметрично: шарнир ходит по биссектрисе, а положение системы задаётся одним углом θ. Смещение шарнира равно изменению d.

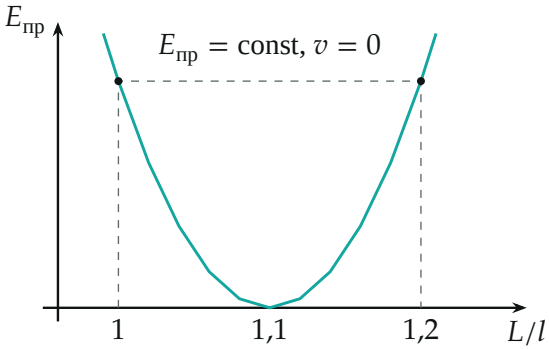
3. Крайние положения — закон сохранения энергии. Трения нет, энергия сохраняется: кинетическая энергия стержней плюс энергия пру-

жины $\frac{k(L-L_0)^2}{2}$ постоянны. Положение системы задаётся одним углом θ, а при неподвижном центре масс скорости всех точек пропорциональны $\dot{\theta}$. В крайнем положении угол перестаёт меняться, все скорости равны нулю, кинетическая энергия равна нулю. Значит, энергия пружины в крайних положениях одна и та же:

$$\frac{k(L-L_0)^2}{2} = \frac{k(L_{\text{нач}}-L_0)^2}{2}.$$

Вначале $\theta = 30°$, $L_{\text{нач}} = 2l\sin 30° = l$ — пружина сжата на $0{,}1\,l$. Другое крайнее положение — растяжение на те же $0{,}1\,l$:

$$L_{\max} = L_0 + 0{,}1\,l = 1{,}2\,l.$$



Энергия пружины в зависимости от её длины. В крайних положениях система покоится, энергия пружины одинакова: сжатие на $0{,}1\,l$ сменяется растяжением на $0{,}1\,l$.

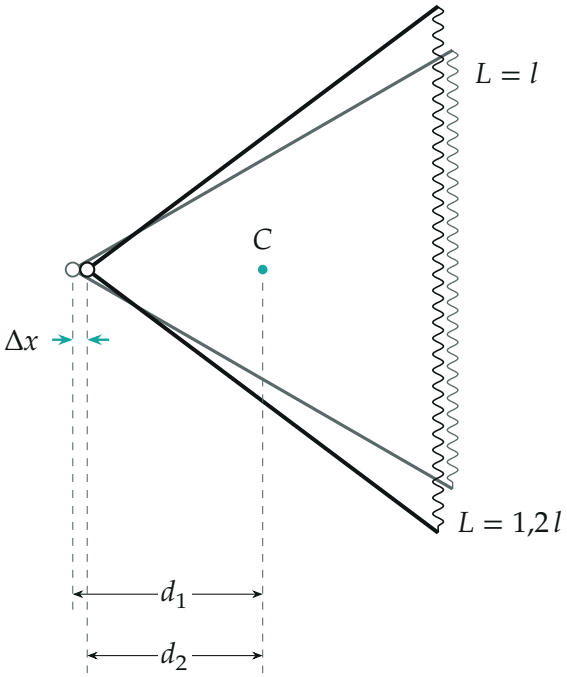
4. Положение шарнира в крайних точках. Вначале $\theta_1 = 30°$:

$$d_1 = \frac{l}{2}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{4}\,l \approx 0{,}433\,l.$$

При наибольшем растяжении $2l\sin\theta_2 = 1{,}2\,l$, то есть $\sin\theta_2 = 0{,}6$,

$\cos\theta_2 = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$:

$$d_2 = \frac{l}{2}\cdot 0{,}8 = 0{,}4\,l.$$



Два крайних положения: серое — начальное (пружина сжата, $L = l$), чёрное — наибольшее растяжение ($L = 1{,}2\,l$). Центр масс C на месте, шарнир сдвинулся на $\Delta x = d_1 - d_2$.

5. Смещение шарнира. Центр масс неподвижен, поэтому шарнир сместился вдоль биссектрисы на

$$\Delta x = d_1 - d_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{4}{10}\right) l \approx 0{,}033\,l,$$

в сторону пружины (расстояние до C уменьшилось). Дальше шарнир возвращается, колеблясь между этими двумя положениями, так что это и есть наибольшее смещение.

Обратите внимание. Удерживать на месте можно только центр масс, а не шарнир: шарнир под действием пружины движется, и искать его смещение «по геометрии одного треугольника» нельзя — нужна неподвижная точка C. Второе: крайнее растяжение равно начальному сжатию только потому, что в крайних положениях покоятся *оба* стержня и шарнир — это обеспечивает симметрия и неподвижность центра масс.

Проверка. Размерность: Δx — длина. Порядок величины: угол меняется от 30° до $36{,}9^\circ$, косинус — от $0{,}866$ до $0{,}8$, и $\Delta x = \frac{l}{2}(0{,}866 - 0{,}8) = 0{,}033\,l$ — маленькое смещение, потому что центр масс близок к середине системы. Предел: если бы пружина была недеформирована ($L_0 = l$), система стояла бы, $\Delta x = 0$.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{l}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\theta_2\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{4}{10}\right) l \approx 0{,}033\,l$, где $\sin\theta_2 = 0{,}6$.

Смысл: внутренние силы (пружина) не могут сдвинуть центр масс, поэтому шарнир «расплачивается» за раскрытие стержней небольшим движением навстречу пружине.

Ответ. $\Delta x = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{4}{10}\right) l \approx 0{,}033\,l$ (шарнир смещается вдоль биссектрисы в сторону пружины).