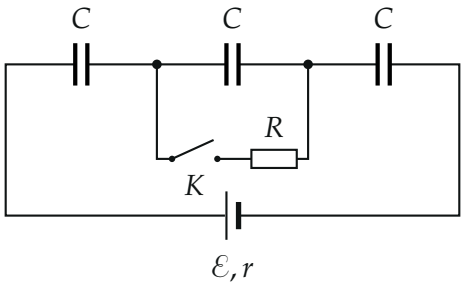
Тепло в цепи из трёх конденсаторов

Задача 10. [Курчатов 2012/13, 10 класс, задача 10] Три одинаковых изначально незаряженных конденсатора емкостью $C = 0{,}1$ мкФ каждый соединили в электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Какое количество теплоты выделится после замыкания ключа K? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В.



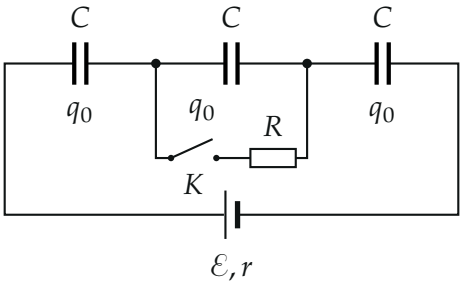
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на перезарядку конденсаторов и закон сохранения энергии. Пока ключ разомкнут, через ветвь с резистором ток не идёт, и три конденсатора соединены последовательно с батареей. После замыкания средний конденсатор оказывается замкнут накоротко через R и разряжается, а два крайних заряжаются сильнее. Через батарею проходит дополнительный заряд, она совершает работу; теплота — это работа батареи плюс убыль энергии конденсаторов.

Обозначения. q_0 — заряд каждого конденсатора до замыкания ключа; q — заряд крайних конденсаторов после; W_0, W_1 — энергия конденсаторов до и после; $A_б$ — работа батареи; $Q_т$ — выделившаяся теплота (в резисторе R и во внутреннем сопротивлении r).

1. До замыкания ключа. Сначала конденсаторы не заряжены; при подключении батареи ток идёт по одному пути через все три, поэтому на них одинаковые заряды q_0 (рисунок 2). Ветвь K–R разомкнута, а ток зарядки в конце прекращается, поэтому на r напряжения нет. Второе правило Кирхгофа для контура батарея — три конденсатора (сумма на-

пряжений на конденсаторах равна ЭДС):

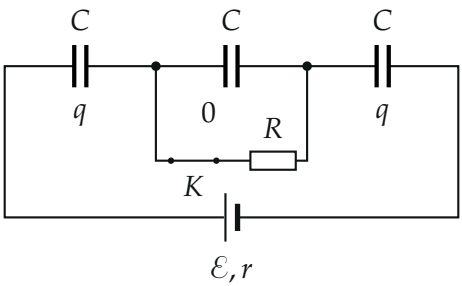
$$3 \cdot \frac{q_0}{C} = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{C\mathcal{E}}{3}, \qquad W_0 = 3 \cdot \frac{q_0^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{6}.$$



До замыкания: три конденсатора последовательно, на каждом заряд q_0, напряжение $\mathcal{E}/3$.

2. После замыкания ключа. Ключ соединяет обкладки среднего конденсатора через R. В новом установившемся состоянии тока нет, напряжение на R равно нулю — значит, и на среднем конденсаторе: он разряжен (рисунок 3). Батарея теперь заряжает два крайних конденсатора, соединённых последовательно:

$$2 \cdot \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{C\mathcal{E}}{2}, \qquad W_1 = 2 \cdot \frac{q^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{4}.$$



После замыкания: средний конденсатор разряжен через R, на крайних заряд q, напряжение $\mathcal{E}/2$.

3. Работа батареи. Заряд, прошедший через батарею, равен изменению заряда левой обкладки левого конденсатора (она соединена с батареей напрямую):

$$\Delta q = q - q_0 = \frac{C\mathcal{E}}{2} - \frac{C\mathcal{E}}{3} = \frac{C\mathcal{E}}{6}, \qquad A_б = \mathcal{E}\,\Delta q = \frac{C\mathcal{E}^2}{6}.$$

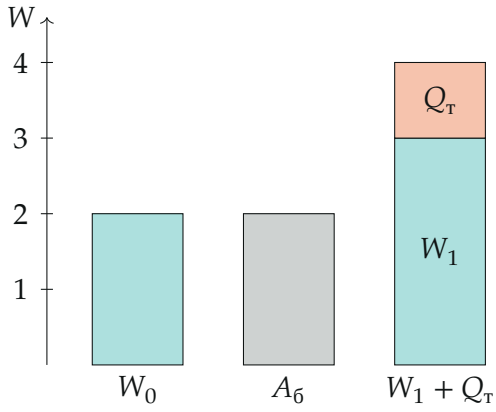
$\Delta q > 0$: заряд прошёл через батарею в направлении её ЭДС, работа батареи положительна.

4. Закон сохранения энергии. Работа батареи идёт на изменение энергии конденсаторов и на теплоту (рисунок 4):

$$A_б = (W_1 - W_0) + Q_т \quad \Rightarrow \quad Q_т = A_б + W_0 - W_1,$$

$$Q_т = \frac{C\mathcal{E}^2}{6} + \frac{C\mathcal{E}^2}{6} - \frac{C\mathcal{E}^2}{4} = \frac{C\mathcal{E}^2}{12}.$$

Подставляем: $Q_т = \dfrac{0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 144}{12}$ Дж $= 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Дж.



Баланс энергии в единицах $C\mathcal{E}^2/12$: было W_0 и работа батареи $A_б$; стало W_1, остальное — теплота $Q_т$.

5. Второй способ — через энергию разряда и «переноса». Средний конденсатор отдаёт свою энергию $\frac{q_0^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{18}$ целиком в тепло на R. Крайние два вместе с батареей — это последовательная ёмкость $C/2$, которая дозаряжается от q_0 до q при постоянной ЭДС; теплота такой дозарядки $\frac{(\Delta q)^2}{2 \cdot C/2} = \frac{(C\mathcal{E}/6)^2}{C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{36}$. Сумма $\frac{C\mathcal{E}^2}{18} + \frac{C\mathcal{E}^2}{36} = \frac{C\mathcal{E}^2}{12}$ — то же.

Обратите внимание. Энергия конденсаторов выросла ($W_1 > W_0$), но теплота всё равно выделяется: её даёт батарея, совершив работу $\mathcal{E}\Delta q$. Неверно считать теплоту как $W_1 - W_0$ или $W_0 - W_1$. Сопротивления R и r в ответ не входят — от них зависит только, где и как быстро выделится тепло.

Ответ: $Q_т = A_б + W_0 - W_1 = \frac{C\mathcal{E}^2}{12} = 1{,}2$ мкДж.

Проверка. Размерность: $Ф \cdot В^2 = Кл \cdot В = Дж$. Знак: $Q_т > 0$, как и должно быть для теплоты. Два способа дают одно и то же.

Ответ. $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{12} = 1{,}2$ мкДж.