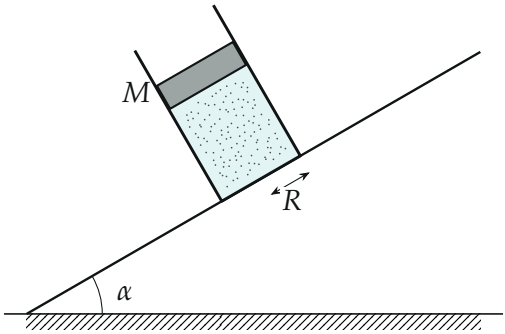
Газ под поршнем на наклонной плоскости

Задача 8. [Курчатов 2012/13, 10 класс, задача 8] Цилиндрический сосуд радиусом $R = 10$ см, в котором находится идеальный газ под поршнем массой $M = 12{,}7$ кг, закреплен на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. Поршень может скользить без трения вдоль стенок сосуда. Газу сообщают количество теплоты $Q = 100$ Дж. При этом поршень перемещается на расстояние $l = 2$ см. Определите изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.



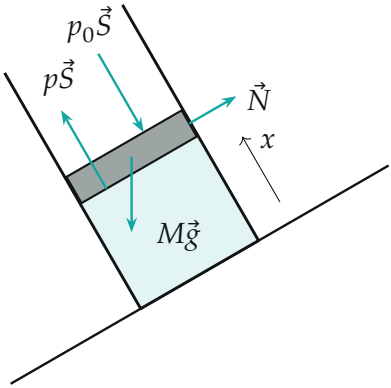
Поясняющий рисунок: сосуд стоит дном на наклонной плоскости, его ось перпендикулярна плоскости.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики. Полученное газом тепло идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа против поршня. Поршень движется медленно (без ускорения), поэтому давление газа всё время одно и то же — его задаёт равновесие поршня: атмосфера плюс та часть силы тяжести поршня, которая направлена вдоль оси сосуда. Процесс изобарный, работа равна pSl.

Обозначения. $S = \pi R^2$ — площадь поршня; p — давление газа; A — работа газа; ΔU — изменение внутренней энергии; ось x — вдоль оси сосуда от дна к поршню.

1. Как стоит сосуд. Сосуд закреплён на наклонной плоскости — стоит на ней дном, его ось перпендикулярна плоскости и образует с вертикалью угол α (угол между нормалями к плоскости и к горизонту). Числа подобраны под это: $Mg\cos\alpha = 12{,}7 \cdot 10 \cdot 0{,}866 \approx 110$ Н.

2. Силы на поршень. На поршень действуют (рисунок 2): сила давления газа pS вдоль оси от газа; сила давления атмосферы p_0S навстречу; сила тяжести $M\vec{g}$ вертикально вниз; сила реакции стенок $\vec{N}$ перпендикулярно оси (трения нет). Ось x берём вдоль оси сосуда, потому что вдоль неё поршень движется и на неё не проецируется неизвестная $\vec{N}$.



Силы на поршень. $M\vec{g}$ вертикальна и составляет угол α с осью сосуда; $\vec{N}$ перпендикулярна оси.

3. Давление газа. Поршень движется медленно, его ускорение пренебрежимо мало. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось x:

$$pS - p_0S - Mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 + \frac{Mg\cos\alpha}{S}.$$

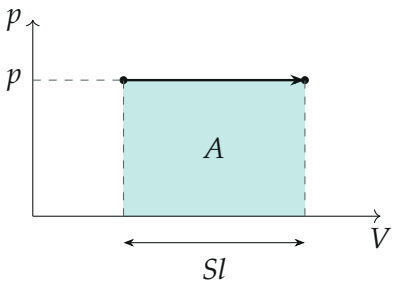
Сила тяжести проецируется с минусом: её составляющая вдоль оси направлена к дну. Давление постоянно, пока поршень движется, — процесс изобарный.

4. Работа газа. При постоянном давлении работа газа — площадь под изобарой на графике $p(V)$ (рисунок 3), объём вырос на $\Delta V = Sl$:

$$A = p\,\Delta V = (p_0S + Mg\cos\alpha)\,l.$$

Подставляем: $S = \pi \cdot 0{,}1^2$ м^2 $\approx 0{,}0314$ м^2, $p_0S \approx 3142$ Н, $Mg\cos\alpha \approx 110$ Н,

$$A \approx (3142 + 110) \cdot 0{,}02 \text{ Дж} \approx 65 \text{ Дж}.$$

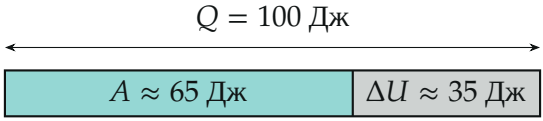


Изобарное расширение: работа газа — площадь прямоугольника под изобарой.

5. Первый закон термодинамики. Тепло, полученное газом, идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа:

$$Q = \Delta U + A \quad \Rightarrow \quad \Delta U = Q - (p_0 \pi R^2 + Mg\cos\alpha)\, l \approx 100 - 65 = 35 \text{ Дж}.$$

$\Delta U > 0$: внутренняя энергия газа увеличилась (газ нагрелся). Распределение тепла — на рисунке 4.



Куда ушло тепло Q: две трети — на работу, треть — на нагрев газа. Вклад веса поршня в работу, $Mgl\cos\alpha \approx 2{,}2$ Дж, мал.

Обратите внимание. Учитывается не весь вес поршня, а только его составляющая вдоль оси сосуда $Mg\cos\alpha$; составляющую поперёк оси держат стенки. Атмосферу тоже учитываем: без $p_0 S$ вышло бы ≈ 98 Дж.

Ответ: $\Delta U = Q - \left(p_0 \pi R^2 + Mg\cos\alpha\right) l \approx 35$ Дж (внутренняя энергия увеличилась).

Проверка. Размерность: Па $\cdot$ м^2 $\cdot$ м $=$ Дж. Предел $\alpha = 0$ (сосуд стоит вертикально): получается известное $p = p_0 + Mg/S$. Если бы ось сосуда шла вдоль наклонной плоскости, вместо $\cos\alpha$ стоял бы $\sin\alpha$ и $\Delta U \approx 100 - 64{,}1 = 35{,}9 \approx 36$ Дж — главный вклад даёт атмосфера.

Ответ. $\Delta U = Q - \left(p_0 \pi R^2 + Mg\cos\alpha\right) l \approx 35$ Дж.