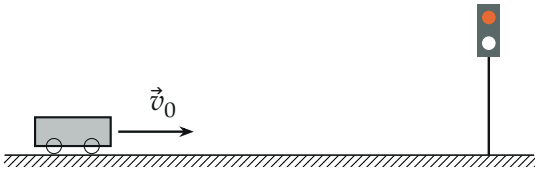
Автомобиль в пробке

Задача 1. [Курчатов 2012/13, 7 класс, задача 1] Автомобиль в пробке перед светофором 30 секунд ехал с постоянной скоростью, а затем его скорость в течение такого же промежутка времени равномерно уменьшалась до нулевого значения. За 1 минуту автомобиль прошел некоторый путь. На какой половине этого пути — первой или второй — средняя скорость автомобиля была больше, и во сколько раз?



Поясняющий рисунок: автомобиль едет к светофору со скоростью v_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на графики движения. Путь на графике скорости — площадь под ним. Первая половина пути проходится целиком на постоянной скорости v_0; вторая включает конец участка с постоянной скоростью и всё торможение, где автомобиль едет медленно. Поэтому средняя скорость на первой половине больше — осталось найти, во сколько раз.

Обозначения. v_0 — скорость на первом участке; $\tau = 30$ с — длительность каждого участка; s — весь путь за $2\tau = 60$ с; t_1 — момент, когда пройдена половина пути; v_1, v_2 — средние скорости на первой и второй половинах.

1. График скорости и весь путь. Строим график $v(t)$ (рисунок 2): до τ — горизонтальная прямая v_0, от τ до 2τ — прямая, убывающая до нуля. Путь — площадь под графиком: прямоугольник плюс треугольник,

$$s = v_0\tau + \frac{v_0\tau}{2} = \frac{3}{2}v_0\tau.$$

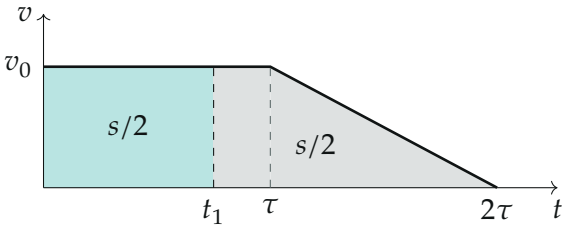


График скорости. Площадь под ним — путь; вертикаль t_1 делит её пополам: бирюзовая часть — первая половина пути, серая — вторая.

2. Когда пройдена половина пути. Половина пути $\frac{s}{2} = \frac{3}{4}v_0\tau$ меньше пути на первом участке $v_0\tau$, значит, она пройдена ещё при постоянной скорости:

$$v_0 t_1 = \frac{3}{4}v_0\tau \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{3}{4}\tau = 22{,}5 \text{ с}.$$

3. Средняя скорость на первой половине. По определению средняя скорость — путь, делённый на время:

$$v_1 = \frac{s/2}{t_1} = v_0.$$

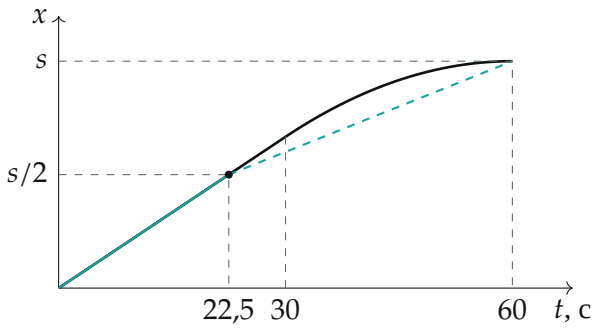
4. Средняя скорость на второй половине. Вторая половина пути занимает время от t_1 до 2τ:

$$t_2 = 2\tau - t_1 = \frac{5}{4}\tau = 37{,}5 \text{ с}, \qquad v_2 = \frac{s/2}{t_2} = \frac{\frac{3}{4}v_0\tau}{\frac{5}{4}\tau} = \frac{3}{5}v_0.$$

5. Отношение.

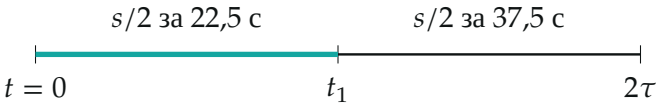
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_0}{\frac{3}{5}v_0} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67.$$

На рисунке 3 — график пути $x(t)$ по вычисленным точкам: средняя скорость на половине пути — наклон хорды. Хорда первой половины круче.



Путь от времени: до 30 с — прямая, потом парабола с горизонтальной касательной в конце. Хорды (бирюзой) — средние скорости на половинах пути.

6. Второй способ — через отношение времён. Обе половины пути одинаковы, поэтому средние скорости обратно пропорциональны времени: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{37{,}5}{22{,}5} = \frac{5}{3}$. Значение v_0 не нужно (рисунок 4).



Две равные половины пути и время на каждую.

Обратите внимание. Половина пути — это не половина времени: за первые 30 с автомобиль проходит $\frac{2}{3}$ всего пути, поэтому граница половин пути лежит внутри участка с постоянной скоростью.

Ответ: на первой половине средняя скорость больше в $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$ раза.

Проверка. Отношение безразмерно, от v_0 и τ не зависит — как и должно, ведь в условии их числа не важны. Контроль по пути: $v_1 t_1 + v_2 t_2 = v_0 \cdot \frac{3}{4}\tau + \frac{3}{5}v_0 \cdot \frac{5}{4}\tau = \frac{3}{2}v_0\tau = s$.

Ответ. На первой половине пути, в $5/3 \approx 1{,}7$ раза.